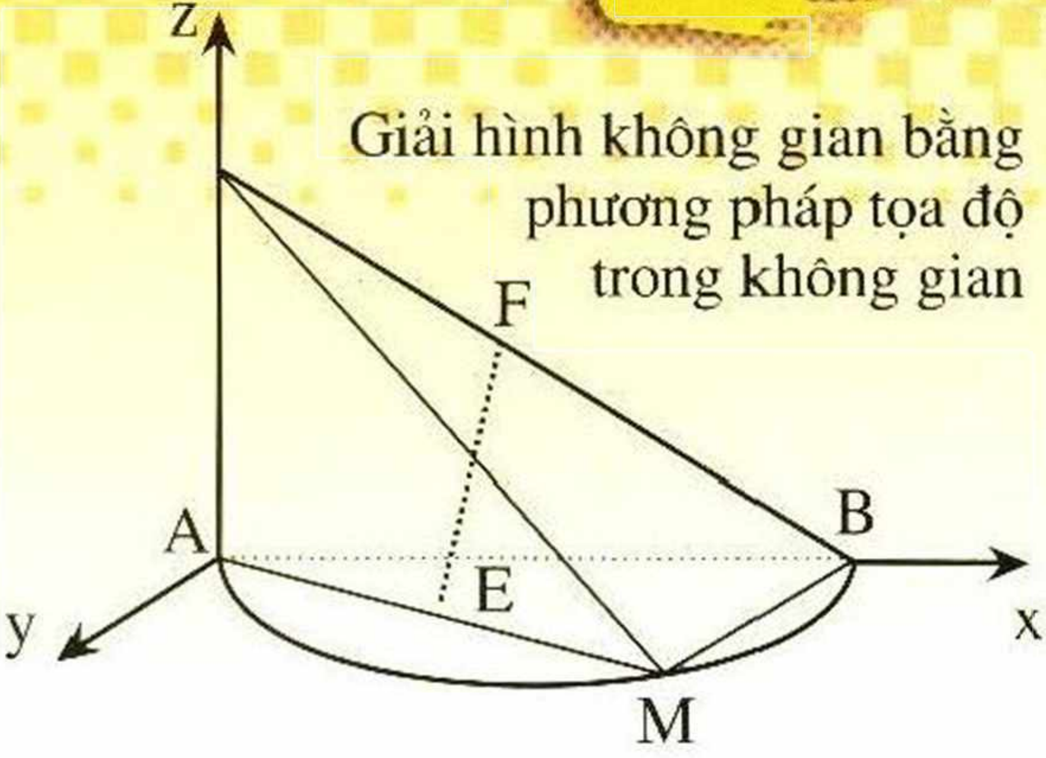
LÊ HỒNG ĐỨC - LÊ HỮU TRÍ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Hình học giải tích trong không gian

GỒM 36 CHỦ ĐỀ CHO 58 DẠNG TOÁN VỚI 146 VÍ DỤ 119 BÀI TOÁN CHỌN LỌC VÀ 218 BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải hình không gian bằng phương pháp tọa độ trong không gian



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HỒNG ĐỨC - LÊ HỮU TRÍ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
HÌNH HỌC GIẢI TÍCH
TRONG KHÔNG GIAN

BIÊN SOẠN THEO CHƯƠNG TRÌNH CHỈNH LÝ HỢP NHẤT
HIỆN HÀNH CỦA BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

Hưởng ứng lời kêu gọi đổi mới phương pháp dạy và học
LẤY HỌC TRÒ LÀM TRUNG TÂM

Tài liệu này xin dành tặng người Cha đáng kính của các tác giả.

LỜI GIỚI THIỆU

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ tài liệu:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

do Thạc sĩ Toán học Lê Hồng Đức chủ biên. Bộ tài liệu gồm 10 tập:

Tập 1. Phương pháp giải Toán Lượng giác.
Tập 2. Phương pháp giải Toán Hình học Giải tích trong Mặt phẳng.
Tập 3. Phương pháp giải Toán Hình học Giải tích trong Không gian.
Tập 4. Phương pháp giải Toán Hình học Không gian.
Tập 5. Phương pháp giải Toán Véctơ.
Tập 6. Phương pháp giải Toán Đại số.
Tập 7. Phương pháp giải Toán Hàm số.
Tập 8. Phương pháp giải Toán Tích phân.
Tập 9. Phương pháp giải Toán Tổ hợp.
Tập 10. Ôn tập Toán thi Tốt nghiệp Trung học phổ thông.

Với mục đích giúp các Thầy, Cô giáo có được bài giảng có hiệu quả hơn và các em có được cái nhìn tổng quan, hiểu được bản chất của mỗi vấn đề đặt ra, từ đó đưa ra phương pháp giải mạch lạc phù hợp với những đòi hỏi của một bài thi, nên mỗi trong mỗi tập tài liệu chúng tôi sắp xếp, hệ thống các kiến thức được đề cập trong chương trình Toán Trung học Phổ thông thành các Chủ đề. Mỗi Chủ đề được chia thành ba mục:

I. Kiến thức cơ bản: *Gồm phương pháp giải cho mỗi dạng toán cơ bản được trình bày dưới dạng các bài toán và các ví dụ về giải toán.*

II. Các bài toán chọn lọc: *Gồm các bài toán được tuyển chọn có chọn lọc từ các bài tập trong cuốn Bộ đề thi tuyển sinh môn Toán và từ các Đề thi tuyển sinh môn Toán vào các trường Đại học kể từ năm 1994 tới nay.*

III. Bài tập đề nghị

Như vậy ở mỗi chủ đề:

1. *Với việc trình bày dưới dạng các bài toán cơ bản, cùng ví dụ minh hoạ ngay sau đó, sẽ giúp tăng chất lượng bài giảng cho các Thầy, Cô giáo và với các em học sinh sẽ hiểu và biết cách trình bày bài.*

2. *Tiếp đó tới các bài toán chọn lọc được lấy ra từ các đề thi vào các trường Đại học, sẽ giúp các Thầy, Cô giáo dẫn dắt các em học sinh tiếp cận nhanh chóng với những đòi hỏi của thực tế.*

3. *Đặc biệt là nội dung của các chú ý sau một vài ví dụ hoặc bài toán chọn lọc sẽ giúp các Thầy, Cô giáo củng cố những hiểu biết chưa thật thấu đáo, cùng với cách nhìn nhận vấn đề đặt ra cho các em học sinh, để trả lời một cách thoả đáng câu hỏi " Tại sao lại nghĩ và làm như vậy ? ".*

4. *Ngoài ra có rất nhiều bài toán được giải bằng nhiều cách khác nhau sẽ giúp các học sinh trở lên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.*

Bộ tài liệu được viết trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, giải quyết tương đối triệt để các vấn đề của toán học sơ cấp. Bộ

tài liệu này chắc chắn phù hợp với nhiều đối tượng bạn đọc từ các Thày, Cô giáo đến các em Học sinh lớp 10, 11, 12 và các em chuẩn bị dự thi môn Toán Tốt nghiệp PTTH hoặc vào các Trường Đại học.

Cuốn **PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN** *được viết dựa trên việc rút kinh nghiệm và tiếp thu ý kiến đóng góp của bạn đọc từ cuốn Tuyển tập các Chuyên đề Luyện thi Đại học Môn Toán - Hình học Giải tích của Lê Hồng Đức và Trần Phương, đã được Nhà xuất bản Hà Nội ấn hành quý II năm 2002. Cuốn tài liệu được chia thành 5 phần:*

Phần I. Mặt phẳng

Phần II. Đường thẳng trong không gian

Phần III. Các bài toán về điểm, đường thẳng và mặt phẳng

Phần IV. Mặt cầu

Phần V. Các bài toán hình học không gian giải bằng phương pháp toạ độ trong không gian

bao gồm 36 chủ đề, miêu tả chi tiết phương pháp giải cho hơn 60 dạng toán hình học giải tích trong không gian thường gặp. Và để giúp bạn đọc tiện tra cứu, chúng tôi mạnh dạn thay đổi cách trình bày phần mục lục so với lề thói cũ bằng việc liệt kê các bài toán thay cho đầu mục.

Thay mặt nhóm tác giả, tôi xin bày tỏ tại đây lời cảm ơn đến người học trò của mình là Lê Bích Ngọc đã vui lòng nhận kiểm tra lại từng phần của bản thảo cùng với việc cộng tác viết cuốn " ***Phương pháp giải Toán Tích phân*** *". Xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới sự giúp đỡ động viên tinh thần của những người Thày mà tôi hằng kính trọng, gồm: GS.TS Trần Mạnh Tuấn nguyên Phó Giám Đốc Trung Tâm KHTN & CNQG, Nhà Giáo ưu tú Đào Thiện Khải nguyên Hiệu Trưởng Trường PTTH Hà Nội - Amsterdam, PGS.TSKH Đinh Quang Lưu, GS.TSKH Nguyễn Văn Thu và người Thày thủa thiếu thời của tôi Bác Ngô Lâm.*

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng bằng việc tham khảo một lượng rất lớn các tài liệu hiện nay để vừa viết, vừa mang đi giảng dạy ngay cho các học sinh của mình từ đó kiểm nghiệm và bổ xung thiếu sót, cùng với việc tiếp thu có chọn lọc ý kiến của các bạn đồng nghiệp để hoàn thiện bộ tài liệu này, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

Mọi ý kiến xin liên hệ trực tiếp hoặc gửi về theo địa chỉ:

Nhóm tác giả Cự Môn

Số 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội

Điện thoại: (04) 7196671

E-mail: cumon@hn.vnn.vn hoặc lehongduc39@yahoo.com

Website: www.toanpt.cumon.edu (sẽ khai trương vào ngày 31/10/2004)

Hà nội, ngày 1 tháng 1 năm 2003

LÊ HỒNG ĐỨC

MỤC LỤC

LỜI GIỚI THIỆU
MỞ ĐẦU 1

PHẦN I
MẶT PHẲNG

Chủ đề 1. Phương trình mặt phẳng 15
Bài toán 1. Phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm có vtpt $\vec{n}$ 16
Bài toán 2. Phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm có vtcp $\vec{a}$ và $\vec{b}$ 17
Bài toán 3. Phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng..........18
Bài toán 4. Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn......................................19
Chủ đề 2. Chuyển dạng phương trình mặt phẳng..21
Bài toán 1. Tìm một cặp vtcp của mặt phẳng...21
Bài toán 2. Tìm một vtpt của mặt phẳng...22
Bài toán 3. Chuyển phương trình tổng quát của mặt phẳng về dạng tham số. 23
Bài toán 4. Chuyển phương trình tham số của mặt phẳng về dạng tổng quát. 24
Chủ đề 3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng 31
Chủ đề 4. Chùm mặt phẳng 35
Chủ đề 5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng 49
Bài toán 1. Khoảng cách hình học từ một điểm đến một mặt phẳng. 49
Bài toán 2. Viết phương trình mặt phẳng cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng h và thoả mãn điều kiện K. 50
Bài toán 3. Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi (P_1), (P_2) chứa điểm M_0 hoặc của góc đối đỉnh với nó. 51
Bài toán 4. Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc nhị diện. 52

PHẦN II
ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Chủ đề 1. Phương trình đường thẳng 55
Chủ đề 2. Chuyển dạng phương trình đường thẳng 59
Bài toán 1. Tìm một vtcp của đường thẳng (d) cho trước.. 59
Bài toán 2. Chuyển dạng phương trình tổng quát của đường thẳng sang dạng phương trình tham số hoặc chính tắc.. 60
Bài toán 3. Cách chuyển dạng phương trình tham số của đường thẳng sang dạng phương trình tổng quát. 61
Chủ đề 3. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng 67
Bài toán 1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng. 67

Bài toán 2. Giả sử (d)∩(P)={A}. Lập phương trình đường thẳng (d_1) qua A vuông góc với (d) và nằm trong mặt phẳng (P). ..75
Bài toán 3. Bài toán về họ đường thẳng (d_m) ..71
Chủ đề 4. Vị trí tương đối của hai đường thẳng .. 77
Bài toán 1. Ứng dụng tích hỗn tạp xét vị trí tương đối của hai đường thẳng ..77
Bài toán 2. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng. ..78
Bài toán 3. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.. 79
Bài toán 4. Viết phương trình đường thẳng (d) song song, cách đều hai đường thẳng song song (d_1), (d_2) và thuộc mặt phẳng chứa hai đường thẳng (d_1), (d_2). .. 79
Bài toán 5. Viết phương trình đường phân giác của hai đường thẳng cắt nhau (d_1), (d_2). ..80
Chủ đề 5. Hai đường thẳng đồng phẳng và các bài toán liên quan.. 83
Bài toán 1. Xác định toạ độ giao điểm của hai đường thẳng.. 83
Bài toán 2. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng đồng phẳng (d_1) và (d_2). ..84
Chủ đề 6. Hai đường thẳng chéo nhau và các bài toán liên quan.. ..93
Bài toán 1. CMR hai đường thẳng chéo nhau. ..93
Bài toán 2. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.. ..94
Bài toán 3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.. ..98

PHẦN III
ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Chủ đề 1. Đường thẳng đi qua một điểm cắt cả hai đường thẳng cho trước.. 109
Chủ đề 2. Đường thẳng đi qua một điểm vuông góc với hai đường thẳng cho trước.. ..119
Chủ đề 3. Đường thẳng đi qua một điểm vuông góc với một đường thẳng và cắt một đường thẳng khác.. ..123
Chủ đề 4. Hình chiếu vuông góc của điểm lên mặt phẳng.. 129
Bài toán 1. Tìm toạ độ hình chiếu của một điểm lên một mặt phẳng. ..129
Bài toán 2. Tìm điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (P). ..129
Bài toán 3. Xác định phương trình đường thẳng đối xứng với một đường thẳng cho trước qua một mặt phẳng cho trước. ..130
Chủ đề 5. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng lên mặt phẳng.. 137
Chủ đề 6. Hình chiếu vuông góc của điểm lên đường thẳng .. 147
Bài toán 1. Tìm toạ độ hình chiếu của một điểm lên một đường thẳng. .. 147
Bài toán 2. Tìm điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng (d) 147
Bài toán 3. Xác định phương trình đường thẳng đối xứng với một đường thẳng cho trước qua một đường thẳng cho trước .. 147

Chủ đề 7. Điểm và mặt phẳng 159

Chủ đề 8. Điểm và đường thẳng 167

Bài toán 1. Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M, y_M, z_M)$ thoả mãn tính chất K 167

Bài toán 2. Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M, y_M, z_M)$ sao cho $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ nhỏ nhất 168

Bài toán 3. Cho hai điểm A, B và đường thẳng (d). Tìm điểm $M \in (d)$ sao cho MA+MB nhỏ nhất 168

Chủ đề 9. Góc trong không gian 173

Bài toán 1. Xác định góc giữa hai đường thẳng 173

Bài toán 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng 174

Bài toán 3. Xác định góc giữa 2 mặt phẳng 175

Chủ đề 10. Tam giác trong không gian 181

PHẦN IV
MẶT CẦU

Chủ đề 1. Phương trình mặt cầu 189

Chủ đề 2. Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng 197

Chủ đề 3. Mặt cầu cắt mặt phẳng 203

Chủ đề 4. Mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng 207

Bài toán 1. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I(a, b, c) và tiếp xúc với đường thẳng (d) cho trước 207

Bài toán 2. Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng (d) tại điểm $H(x_0, y_0, z_0)$ và thoả mãn điều kiện K 208

Bài toán 3. Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với 2 đường thẳng cắt nhau (d_1), (d_2) cho trước và thoả mãn điều kiện K. 209

Bài toán 4. Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với 2 đường thẳng (d_1), (d_2) song song với nhau cho trước và thoả mãn điều kiện K. 210

Bài toán 5. Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với 2 đường thẳng chéo nhau (d_1), (d_2) cho trước và thoả mãn điều kiện K. 212

Chủ đề 5. Mặt cầu cắt đường thẳng 219

Chủ đề 6. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện 223

Chủ đề 7. Mặt cầu nội tiếp khối đa diện 231

Chủ đề 8. Vị trí tương đối của điểm và mặt cầu 237

Bài toán 1. Xác định vị trí tương đối của mặt cầu (S) và điểm A cho trước. 237

Bài toán 2. Cho mặt cầu (S) và đểm A không trùng với tâm I của (S). Tìm toạ độ điểm M thuộc (S) sao cho khoảng cách MA đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. 237

Chủ đề 9. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu 239

Bài toán 1. Xác định vị trí tương đối của mặt cầu (S) và đường thẳng (d) 239

Bài toán 2. Tìm toạ độ điểm M thuộc (S) sao cho khoảng cách từ M đến (d) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất 241

Chủ đề 10. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu 245

Bài toán 1. Xác định vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) 245

Bài toán 2. Tìm toạ độ điểm M thuộc (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất 246

Bài toán 3. Chùm mặt cầu dạng 1 248

Chủ đề 11. Vị trí tương đối của hai mặt cầu 253

Bài toán 1. Xác định vị trí tương đối của hai mặt cầu (S_1) và (S_2) 253

Bài toán 2. Chùm mặt cầu dạng 2 254

Chủ đề 12. Tiếp tuyến của mặt cầu, tiếp diện của mặt cầu 257

PHẦN V
CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Chủ đề 1. Giải bài toán định lượng trong hình học không gian 263

Chủ đề 2. Giải bài toán định tính trong hình học không gian 279

Chủ đề 3. Giải bài toán về điểm và quỹ tích trong hình học không gian 287

Chủ đề 4. Giải bài toán cực trị trong hình học không gian 291

TÀI LIỆU THAM KHẢO 302

MỞ ĐẦU

Cho hệ toạ độ Oxyz.

Vectơ

Cho hai điểm $M_1(x_1, y_1, z_1)$ và $M_1(x_2, y_2, z_2)$ thì:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

Các phép toán Vectơ

Nếu có hai vectơ $\vec{v}_1 (x_1, y_1, z_1)$ và $\vec{v}_2 (x_2, y_2, z_2)$ thì:

(i). $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

(ii). $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$

(iii). $k\vec{v}_1 (x_1, y_1, z_1) = (kx_1, ky_1, kz_1)$, $k \in R$.

Khoảng cách d giữa hai điểm $M_1(x_1, y_1, z_1) \equiv P_1(\vec{r}_1)$ và $M_1(x_2, y_2, z_2) \equiv P_2(\vec{r}_2)$ là độ dài của vectơ $\overrightarrow{M_1M_2}$

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Chia một đoạn thẳng theo một tỉ số cho trước. Điểm M(x, y, z) chia đoạn thẳng M_1M_2 theo một tỉ số k: $\overrightarrow{MM_1} = k\overrightarrow{MM_2}$ được xác định bởi các công thức:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 - kx_2}{1-k} \\ y = \dfrac{y_1 - ky_2}{1-k} \\ z = \dfrac{z_1 - kz_2}{1-k} \end{cases} \qquad (1)$$

Đặc biệt nếu k=-1, thì M là trung điểm của đoạn thẳng M_1M_2, khi đó toạ độ của M được xác định bởi:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ z = \dfrac{z_1 + z_2}{2} \end{cases} \qquad (2)$$

Góc α giữa hai vectơ $\vec{v}_1 (x_1, y_1, z_1)$ và $\vec{v}_2 (x_2, y_2, z_2)$ xác định bởi:

$$\cos\alpha = \frac{x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (3)$$

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp " ***Lấy học trò làm trung tâm*** "
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

Côsin chỉ phương. Côsin của các góc giữa vectơ $\vec{v}(x, y, z)$ và hướng dương của các trục Ox, Oy, Oz được gọi là **Côsin chỉ phương** $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$ được xác định bởi:

$$\cos\alpha_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (4.1)$$

$$\cos\alpha_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (4.2)$$

$$\cos\alpha_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (4.3)$$

$$\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = 1. \quad (4.4)$$

Ba điểm thẳng hàng. Ba điểm $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ và $C(x_3, y_3, z_3)$ thẳng hàng nếu (điều kiện cần và đủ) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Bốn điểm đồng phẳng. Bốn điểm $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ và $C(x_3, y_3, z_3)$ và $D(x_4, y_4, z_4)$ đồng phẳng nếu (điều kiện cần và đủ)

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Tích vô hướng giữa hai vectơ $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$ và $\vec{v}_2(x_2, y_2, z_2)$ xác định bởi:

$$\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = x_1 . x_2 + y_1 . y_2 + z_1 . z_2. \quad (8)$$

Tích vectơ (hay tích có hướng) của hai vectơ $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$ và $\vec{v}_2(x_2, y_2, z_2)$ kí hiệu $[\vec{v}_1, \vec{v}_2]$ là một vectơ $\vec{v}$ được xác định bởi:

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \vec{v}\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right). \quad (9)$$

Các tính chất:

(i). $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ cộng tuyến $\Leftrightarrow [\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \vec{o}$,

(ii). $\vec{v}_1 \perp [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$, $\vec{v}_2 \perp [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$,

(iii). $|[\vec{v}_1, \vec{v}_2]| = |\vec{v}_1| . |\vec{v}_2| .\sin\alpha$,

trong đó α là góc giữa hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$.

(iv). $[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = -[\vec{v}_2, \vec{v}_1]$.

(v). $[\lambda\vec{v}_1, \vec{v}_2] = [\vec{v}_1, \lambda\vec{v}_2] = \lambda[\vec{v}_1, \vec{v}_2], \lambda \in R$

(vi). $[\vec{v}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2] = [\vec{v}, \vec{v}_1] + [\vec{v}, \vec{v}_2]$

Diện tích tam giác. Diện tích của tam giác có các đỉnh $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ và $C(x_3, y_3, z_3)$ được cho bởi công thức:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\,|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}. \quad (10)$$

Tích hỗn tạp của ba vectơ $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2(x_2, y_2, z_2)$ và $\vec{v}_3(x_3, y_3, z_3)$ được kí hiệu là $D(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ được xác định bởi:

$$D(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}.x_1 + \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix}.y_1 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.z_1. \quad (11)$$

Các tính chất.

(i). $D(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = -D(\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3) = -D(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2) = -D(\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1)$.

(ii). $D(\lambda\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = D(\vec{v}_1, \lambda\vec{v}_2, \vec{v}_3) = D(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \lambda\vec{v}_3) = \lambda D(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, $\lambda \in R$.

(iii). $D(\vec{v}_1, \vec{a} + \vec{b}, \vec{v}_3) = D(\vec{a}, \vec{v}_2, \vec{v}_3) + D(\vec{b}, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$,

$D(\vec{v}_1, \vec{a} + \vec{b}, \vec{v}_3) = D(\vec{v}_1, \vec{a}, \vec{v}_3) + D(\vec{v}_1, \vec{b}, \vec{v}_3)$,

$D(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{a} + \vec{b}) = D(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{a}) + D(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{b})$.

Ba vectơ đồng phẳng. Điều kiện cần và đủ để 3 vectơ $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2(x_2, y_2, z_2)$ và $\vec{v}_3(x_3, y_3, z_3)$ đồng phẳng là:

$$D(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

Thể tích

(a). Thể tích V của tứ diện có các đỉnh $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ và $D(x_4, y_4, z_4)$ được cho bởi công thức:

$$V = \frac{1}{6}\,|D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}\right|. \quad (13)$$

(b). Thể tích V của hình hộp dựng trên ba vectơ $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2(x_2, y_2, z_2)$

và $\vec{v}_3(x_3, y_3, z_3)$ được cho bởi công thức:

$$V = |D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix} \right\|. \quad (14)$$

PHẦN I
MẶT PHẲNG

CHỦ ĐỀ 1
PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. CẶP VECTƠ CHỈ PHƯƠNG VÀ VECTƠ PHÁP TUYẾN

Định nghĩa 1: Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ gọi là *cặp vectơ chỉ phương* (vtcp) của mặt phẳng (P) nếu chúng không cộng tuyến và các đường thẳng chứa chúng đều song song với (P) (hoặc nằm trên (P)).

Các tính chất của cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

(i). Mỗi mặt phẳng có nhiều cặp vectơ chỉ phương.

(ii). Hai mặt phẳng phân biệt có cùng một cặp vectơ chỉ phương thì song song với nhau.

(iii). Một mặt phẳng (P) được hoàn toàn xác định nếu biết một điểm M và cặp vectơ chỉ phương $(\vec{a}, \vec{b})$ của nó.

Định nghĩa 2: Vectơ $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n} \perp (P) \end{cases}.$$

Nhận xét: $\vec{n}$ là vtpt của (P) thì mọi vectơ $k\vec{n}$ với $k \neq 0$ đều là vtpt của mặt phẳng đó.

Chú ý. Toạ độ của vectơ $\vec{n}$ vuông góc với hai vectơ không cùng phương $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ và $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ cho trước, được xác định bởi:

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Ví dụ 1:

a. Xác định toạ độ của vectơ $\vec{n}$ vuông góc với hai vectơ $\vec{a}(2, -1, 2)$ và $\vec{b}(3, -2, 1)$.

b. Tìm một vtpt của mặt phẳng (P), biết (P) có cặp vtcp là $\vec{a}(2, 1, 2)$ và $\vec{b}(3, 2, 1)$.

Giải.

a. Ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = \vec{n}(3, 4, -1).$$

b. Gọi $\vec{n}$ là vtpt cần tìm của (P). Ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = \vec{n}(-3, 4, 1).$$

Vậy mặt phẳng (P) có một vtpt là $\vec{n}(-3, 4, 1)$.

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp "***Lấy học trò làm trung tâm***"
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

2. PHƯƠNG TRÌNH CỦA MẶT PHẲNG

Mặt phẳng (P) trong không gian Oxyz có phương trình tổng quát :

(P): $Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2>0$ (1)

nhận vectơ $\vec{n}$ (A, B, C) làm vtpt.

Một số trường hợp đặc biệt của phương trình (1)

- Nếu D=0, mặt phẳng (P) đi qua gốc toạ độ.
- Nếu A=0, B≠0, C≠0, mặt phẳng (P) có dạng (P): By+Cz+D=0 sẽ chứa hoặc song song với trục x'Ox. Thật vậy, vtpt của (P) trong trường hợp này là $\vec{n}$ (0, B, C), do đó: $\vec{n}.\vec{i}=0 \Leftrightarrow \vec{n}\perp\vec{i} \Leftrightarrow \vec{n}$ vuông góc với trục x'Ox.
  Vậy (P) song song với trục x'Ox.
  Tương tự, mặt phẳng (P) có dạng (P): Ax+Cz+D=0 sẽ chứa hoặc song song với trục y'Oy, mặt phẳng (P) có dạng (P): Ax+By +D=0 sẽ chứa hoặc song song với trục z'Oz.
- Nếu A=0, B=0, C≠0, mặt phẳng (P) có dạng (P): Cz+D=0 sẽ chứa hoặc song song với trục x'Ox và y'Oy nên nó song song hoặc trùng với mặt phẳng xOy.
  Tương tự, mặt phẳng (P) có dạng (P): Ax+D=0 sẽ song song hoặc trùng với mặt phẳng yOz, mặt phẳng (P) có dạng (P): By +D=0 sẽ song song hoặc trùng với mặt phẳng xOz.

  Đặc biệt các phương trình x=0, y=0, z=0 theo thứ tự là phương trình của các mặt phẳng toạ độ yOz, xOz, xOy.
- Nếu A≠0, B≠0, C≠0, D≠0 thì bằng cách đặt $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$ ta được:

  (P): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (2)

  Phương trình (2) gọi là *phương trình đoạn chắn* của mặt phẳng (P).
- Chia hai vế của phương trình (1) cho $M=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Khi đó, đặt

  $$A_0=\frac{A}{M},\ B_0=\frac{B}{M},\ C_0=\frac{C}{M},\ D_0=\frac{D}{M}$$

  ta được: (P): $A_0x+B_0y+C_0z+D_0=0$ với $A_0^2+B_0^2+C_0^2=1$ (3)

  Phương trình (3) được gọi là *phương trình pháp dạng* của mặt phẳng (P).

Bài toán 1: Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và nhận $\vec{n}$ (n_1, n_2, n_3) làm vtpt

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M_0(x_0, y_0, z_0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(n_1, n_2, n_3) \end{cases}$$

a. *Phương trình vectơ của mặt phẳng*

Điểm $M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}.\vec{n}=0$ (1)

b. *Phương trình tổng quát của mặt phẳng*

(P): $n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0$

Chú ý:

1. Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}$ (n_1, n_2, n_3), luôn có dạng:

   (P): $n_1x+n_2y+n_3z+m=0$

   Để xác định (P), ta cần đi xác định m.

2. Mặt phẳng (P)//(Q): Ax+By+Cz+D=0, luôn có dạng:

   (P): Ax+By+Cz+E=0

   Để xác định (P), ta cần đi xác định E.

Ví dụ 2: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) biết:

a. (P) đi qua điểm M(1, 3, -2) và nhận $\vec{n}$ (2, 3, 1) làm vtpt.

b. (P) đi qua điểm M(1, 3, -2) và song song với (Q): x+y+z+1=0.

Giải.

a. Ta có:

$$(P):\begin{cases}\text{qua } M(1,3,-2)\\ \text{vtpt } \vec{n}(2,3,1)\end{cases} \Leftrightarrow (P): 2(x-1)+3(y-3)+z+2=0 \Leftrightarrow (P): 2x+3y+z-9=0.$$

Vậy phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là: (P): 2x+3y+z-9=0.

b. Ta có:

$$(P):\begin{cases}\text{qua } M(1,3,-2)\\ (P)//(Q): x+y+z+1=0\end{cases}$$

- Vì (P)//(Q): x+y+z+1=0, có dạng: x+y+z+E=0.
- Vì M(1, 3, -2)∈(P), ta có 1+3+2.(-2)+E=0 ⇔ E=0.

Vậy phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) có dạng: x+y+z=0.

Bài toán 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và có cặp vtcp là $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3) và $\vec{b}$ (b_1, b_2, b_3).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có:

$$(P):\begin{cases}\text{qua } M(x_0, y_0, z_0)\\ \text{hai vtcp } \vec{a}(a_1, a_2, a_3)\\ \qquad\qquad \vec{b}(b_1, b_2, b_3)\end{cases} \Leftrightarrow (P):\begin{cases}x = x_0 + a_1t_1 + b_1t_2\\ y = y_0 + a_2t_1 + b_2t_2\\ z = z_0 + a_3t_1 + b_3t_2\end{cases}, (t_1, t_2 \in R). \qquad (1)$$

Phương trình (1) chính là phương trình tham số của mặt phẳng (P)

Ngược lại: nếu (P) có phương trình (1), ta có nhận xét:

- Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
- Mặt phẳng (P) có cặp vtcp $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3) và $\vec{b}$ (b_1, b_2, b_3).

Ví dụ 3: Lập phương trình tham số của mặt phẳng (P) đi qua điểm M(1, 3, 2) và có cặp vtcp là $\vec{a}$ (2, -1, 2) và $\vec{b}$ (3, -2, 1).

Giải.

Ta có:

$$(P):\begin{cases}\text{qua } M(1,3,2)\\ \text{hai vtcp } \vec{a}(2,-1,2) \,\&\, \vec{b}(3,-2,1)\end{cases} \Leftrightarrow (P):\begin{cases}x = 1 + 2t_1 + 3t_2\\ y = 3 - t_1 - 2t_2\\ z = 2 + 2t_1 + t_2\end{cases}, (t_1, t_2 \in R)$$

Đó chính là phương trình tham số của mặt phẳng (P).

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/ 2745

Ví dụ 4: Lập phương trình tham số của mặt phẳng đi qua hai điểm A(4, -1, 1), B(3, 1, -1) và cùng phương với trục Ox.

Giải.

Ta có:

$$(P):\begin{cases}\text{qua } A(4,-1,1)\ \&\ B(3,1,-1)\\ \text{cung phuong} Ox\end{cases} \Leftrightarrow (P):\begin{cases}\text{qua } A(4,-1,1)\\ \text{hai vtcp } \overrightarrow{AB}(-1,2,-2)\ \&\ \overrightarrow{Ox}(1,0,0)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P):\begin{cases}x = 4 - t_1 + t_2\\ y = -1 + 2t_1\\ z = 1 - 2t_1\end{cases},\ (t_1, t_2 \in R)$$

Đó chính là phương trình tham số của mặt phẳng (P).

Bài toán 3: ***Phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm*** $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ và $C(x_3, y_3, z_3)$ không thẳng hàng có dạng:

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có thể lựa chọn một trong ba cách trình bày sau:

Cách 1: Áp dụng bài toán 2, thực hiện theo các bước:

Bước 1: Ta có $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ là một cặp vtcp của mặt phẳng (P), ta được:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\\ \overrightarrow{AC}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)\end{cases}$$

Bước 2: Khi đó phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P):\begin{cases}\text{qua } A(x_1, y_1, z_1)\\ 2 \text{ vtcp } \overrightarrow{AB}\ \&\ \overrightarrow{AC}\end{cases}$$

Cách 2: Áp dụng bài toán 1, thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta được: $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

Bước 2: Khi đó phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P):\begin{cases}\text{qua } A(x_1, y_1, z_1)\\ \text{vtpt } \vec{n}\end{cases}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử (P): Ax+By+Cz+D=0

Bước 2: Vì A, B, C∈(P), ta được:

$$\begin{cases}Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0\\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0\\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A = k_1D\\ B = k_2D\\ C = k_3D\end{cases}.$$

Bước 3: Khi đó:

$$(P): k_1Dx + k_2Dy + k_3Dz + D = 0 \Leftrightarrow (P): k_1x + k_2y + k_3z + 1 = 0.$$

Chú ý:

1. Sử dụng cách 1 ta nhận được phương trình tham số của mặt phẳng (P).
2. Sử dụng cách 2, 3 ta nhận được phương trình tổng quát của mặt phẳng (P)
3. ***Phương trình mặt phẳng theo các đoạn chắn***. Mặt phẳng (P) cắt trục Ox tại A(a, 0, 0), trục Oy tại B(0, b, 0), trục Oz tại C(0, 0, c) có phương trình

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Ví dụ 5: Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm

a. A(1, 1, 0), B(1, 0, 0) và C(0, 1, 1).

b. A(1, 0, 0), B(0, 2, 0) và C(0, 0, 6).

Giải

a. *Cách 1*: Ta có $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ là một cặp vtcp của mặt phẳng (P), ta được:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}(0,-1,0) \\ \overrightarrow{AC}(-1,0,1) \end{cases}$$

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(1,1,0) \\ 2 \text{ vtcp } \overrightarrow{AB}(0,-1,0) \ \& \ \overrightarrow{AC}(-1,0,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} x = 1 - t_2 \\ y = 1 - t_1 \\ z = t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in R)$$

Cách 2: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta được:

$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1, 0, -1)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(1,1,0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(-1,0,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x+z-1=0.$$

b. Nhận xét rằng A, B, C theo thứ tự thuộc ba trục toạ độ, do đó:

$$(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow (ABC): 6x+3y+z-6=0.$$

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 Cho hai điểm A(1, 2, 3); B(3, 4, -1) trong không gian Oxyz.

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) là trung trực của AB.

b. Viết phương mặt phẳng (Q) qua A, vuông góc với (P) và vuông góc với (yOz).

c. Viết phương mặt phẳng (R) qua A và song song với (P).

BÀI GIẢI

a. Ta có:

- Gọi I là trung điểm AB. Khi đó I có toạ độ I(2, 3, 1).
- Mặt phẳng (P) là trung trực của AB, khi đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } I(2,3,1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB}(2,2,-4) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2(x-2)+2(y-3)-4(z-1)=0 \Leftrightarrow (P): x+y-2z-6=0,$$

Đó chính là phương trình tổng quát của (P).

b. Ta có:

- Mặt phẳng (yOz) ⇒ nhận $\vec{n}_1(1, 0, 0)$ làm một vtpt.
- Mặt phẳng (Q) vuông góc với (yOz) ⇒ nhận $\vec{n}_1(1, 0, 0)$ làm một vtcp.
- Mặt phẳng (Q) vuông góc với (P) ⇒ nhận $\overrightarrow{AB}(2, 2, 4)$ làm một vtcp.

Thấy rằng $\vec{n}_1, \overrightarrow{AB}$ không cùng phương. Vậy

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } A(1,2,3) \\ \text{hai vtcp } \vec{n}_1(1,0,0) \ \& \ \overrightarrow{AB}(2,2,4) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} x = 1 + t_1 + 2t_2 \\ y = 2t_2 \\ z = 4t_2 \end{cases}, t_1, t_2 \in R.$$

Đó chính là phương trình tham số của (Q).

c. Ta có:

- Mặt phẳng (R) qua A và song song với (P) ⇒ (R) nhận $\overrightarrow{AB}$ (2, 2, 4) làm vtpt. Vậy:

$$(R): \begin{cases} \text{qua } A(1,2,3) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB}(2,2,-4) \end{cases} \Leftrightarrow (R): 2(x-1)+2(y-2)-4(z-3)=0 \Leftrightarrow (R): x+y-2z+6=0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của (R).

Bài 2 (ĐHCĐ/chưa phân ban-99): Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với A(2,1,4); B(-1,-3,5).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm toạ độ trung điểm I là trung điểm của AB, bởi công thức:

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2},\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Bước 2: Gọi (P) là mặt phẳng trung trực đoạn AB, khi đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB} \end{cases} \Leftrightarrow (P): 6x+8y-2z+11=0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của (P).

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Lập phương trình tham số của mặt phẳng (P) đi qua M(2, 3, 2) và có cặp vtcp là $\vec{a}$ (2, 1, 2) và $\vec{b}$ (3, 2, -1).

Bài tập 2. Lập phương trình tham số của mặt phẳng (P) đi qua M(1, 1, 1) và

a. Song song với các trục Ox và Oy.

b. Song song với các trục Ox và Oz.

c. Song song với các trục Oy và Oz.

Bài tập 3. Lập phương trình tham số của các mặt phẳng đi qua hai điểm A(1, -1, 1), B(2, 1, 1) và:

a. Cùng phương với trục Ox.

b. Cùng phương với trục Oy.

c. Cùng phương với trục Oz.

Bài tập 4. Xác định toạ độ của vectơ $\vec{n}$ vuông góc với 2 vectơ $\vec{a}$ (6, -1, 3) và $\vec{b}$ (3, 2, 1).

Bài tập 5. Tìm một vtpt của mặt phẳng (P), biết (P) có cặp vtcp là $\vec{a}$ (2, 7, 2), $\vec{b}$ (3, 2, 4).

Bài tập 6. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) biết:

a. (P) đi qua điểm M(-1, 3, -2) và nhận $\vec{n}$ (2, 3, 4) làm vtpt.

b. (P) đi qua điểm M(-1, 3, -2) và song song với (Q): x+2y+z+4=0.

Bài tập 7. Lập phương trình tổng quát của các mặt phẳng đi qua I(2, 6, -3) và song song với các mặt phẳng toạ độ.

Bài tập 8. (ĐHL-99): Trong không gian Oxyz cho điểm A(-1, 2, 3) và hai mặt phẳng (P): x-2=0; (Q): y-z-1=0. Viết phương trình mặt phẳng (R) đi qua A và vuông góc với hai mặt phẳng (P), (Q).

CHỦ ĐỀ 2
CHUYÊN DẠNG
PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Tìm một cặp vtcp của mặt phẳng (P) cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

a. *Nếu mặt phẳng (P) cho dưới dạng tham số*

$$(P): \begin{cases} x = x_0 + a_1t_1 + b_1t_2 \\ y = y_0 + a_2t_1 + b_2t_2 \\ z = z_0 + a_3t_1 + b_3t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in R),$$

thì một cặp vtcp của (P) là:

$$\begin{cases} \vec{a}(a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b}(b_1, b_2, b_3) \end{cases}.$$

b. *Nếu mặt phẳng cho dưới dạng tổng quát*

(P): $Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2>0$ (1)

thì một cặp vtcp $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3) và $\vec{b}$ (b_1, b_2, b_3) của (P) được xác định bởi:

$$\begin{cases} \vec{n}.\vec{a} = 0 \ (2) \\ \vec{n}.\vec{b} = 0 \ (3) \\ \vec{a} \not// \vec{b} \ \ (4) \end{cases}, \text{ trong đó } \vec{n}\ (A, B, C) \text{ là vtpt của (P).}$$

Để tìm $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3) và $\vec{b}$ (b_1, b_2, b_3) thoả mãn (2), (3), (4) ta có:

- Từ (2) ⇔ $Aa_1+Ba_2+Ca_3=0$ (5)
- Từ (3) ⇔ $Ab_1+Bb_2+Cb_3=0$ (6)
- Từ (5), (6) ta chọn $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3) và $\vec{b}$ (b_1, b_2, b_3) sao cho thoả mãn (4).

Vậy ta có một cặp vtcp của (P) là: $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3) và $\vec{b}$ (b_1, b_2, b_3).

Chú ý. Ta có thể chọn ba điểm không thẳng hàng A, B, C thuộc (P). Khi đó, cặp vtcp cần tìm là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 1: Tìm một cặp vtcp của các mặt phẳng sau:

a. $(P): \begin{cases} x = 1 + t_1 + t_2 \\ y = 2t_1 - 3t_2 \\ z = 1 + 3t_1 + t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in R).$ b. (P): $x+2y+3z-5=0$.

Giải.

a. Mặt phẳng (P) có cặp vectơ chỉ phương là:

$$\begin{cases} \vec{a}(1,2,3) \\ \vec{b}(1,-3,1) \end{cases}.$$

b. Mặt phẳng (P) có một vtpt là: $\vec{n}\,(1, 2, 3)$.

Gọi $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ là một vtcp của (P), ta có: $\vec{a}\,.\,\vec{n} = 0 \Leftrightarrow a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$ (1)

- Ta đi tìm bộ ba thứ nhất (a_1, a_2, a_3) thoả mãn (1)
  - Cho $a_3=0$ thì (1) có dạng $a_1+2a_2=0$ (2)
  - Cho $a_1=2$ thì từ (2) ta có $a_2=-1$.

  $\Rightarrow$ Ta được vtcp thứ nhất $\vec{a}\,(2, -1, 0)$.
- Ta đi tìm bộ ba thứ hai (a_1, a_2, a_3) thoả mãn (1)
  - Cho $a_2=0$ thì (1) có dạng $a_1+3a_3=0$ (3)
  - Cho $a_1=3$ thì từ (3) ta có $a_3=-1$.

  $\Rightarrow$ Ta được vtcp thứ hai $\vec{b}\,(3, 0, -1)$.

Nhận thấy $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương.

Vậy một cặp vtcp của (P) là:

$$\begin{cases}\vec{a}(2,-1,0)\\ \vec{b}(3,0,-1)\end{cases}.$$

Bài toán 2: Tìm một vtpt của mặt phẳng (P) cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

a. *Nếu mặt phẳng cho dưới dạng tổng quát*

$$(P): Ax+By+Cz+D=0 \text{ với } A^2+B^2+C^2>0$$

thì $\vec{n}\,(A, B, C)$ là vtpt của (P).

b. *Nếu mặt phẳng cho dưới dạng tham số*

$$(P): \begin{cases} x = x_0 + a_1t_1 + b_1t_2 \\ y = y_0 + a_2t_1 + b_2t_2 \\ z = z_0 + a_3t_1 + b_3t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in R) \text{ có cặp vtcp } \begin{cases}\vec{a}(a_1,a_2,a_3)\\ \vec{b}(b_1,b_2,b_3)\end{cases}.$$

Khi đó vtpt $\vec{n}$ của (P) được xác định bởi:

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Ví dụ 2: Tìm một vtpt của các mặt phẳng sau:

a. (P): $2x+y-4z-5=0$.

b. $(P): \begin{cases} x = 1 - 2t_1 + 3t_2 \\ y = 3 + 2t_1 - 3t_2 \\ z = 2 + t_1 + 2t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in R)$

Giải.

a. Mặt phẳng (P) sẽ có một vtpt là: $\vec{n}\,(2, 1, -4)$.

b. Mặt phẳng (P) có một cặp vtcp là:

$$\begin{cases}\vec{a}(-2,2,1)\\ \vec{b}(3,-3,2)\end{cases}.$$

Khi đó vtpt $\vec{n}$ của (P) được xác định bởi:

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \right) = \vec{n}\,(7, 7, 0).$$

Bài toán 3: Chuyển phương trình tổng quát của (P) sang dạng tham số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát dưới dạng:

(P): $Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2>0$ (1)

Để chuyển phương trình của (P) sang dạng tham số ta chọn một trong các cách sau:

Cách 1. Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn ba điểm thuộc mặt phẳng (P) bằng cách:

- Cho $x=y=0$, tìm z, ta có điểm A.
- Cho $x=z=0$, tìm y, ta có điểm B.
- Cho $y=z=0$, tìm x, ta có điểm C.

Bước 2: Kiểm tra lại: " $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương với $\overrightarrow{AC}$ ".

Bước 3: Viết phương trình tham số của (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ làm cặp vtcp.

Cách 2. Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm một điểm A thuộc (P).

Bước 2: Dựa vào bài toán 3/b tìm một cặp vtcp của (P). Từ đó suy ra được phương trình tham số của (P).

Cách 3. Đặt $x=f(t_1)$, $y=g(t_2)$, thay vào (1), suy ra $z=h(t_1, t_2)$.

Tập x, y, z chính là phương trình tham số của (P).

Ví dụ 3: Chuyển dạng phương trình của (P): $x+2y+3z-6=0$ sang dạng tham số.

Giải.

Cách 1: Chọn ba điểm A, B, C mặt phẳng (P) bằng cách:

- Cho $x=y=0$, suy ra $z=2$, ta có điểm A(0, 0, 2).
- Cho $x=z=0$, suy ra $y=3$, ta có điểm B(0, 3, 0).
- Cho $y=z=0$, suy ra $x=6$, ta có điểm C(6, 0, 0).

- Ta có: $\overrightarrow{AB}(0, 3, -2)$ và $\overrightarrow{AC}(6, 0, -2)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.
- Từ đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(0,0,2) \\ \text{hai vtcp } \overrightarrow{AB}(0,3,-2) \ \& \ \overrightarrow{AC}(6,0,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} x = 6t_2 \\ y = 3t_1 \\ z = 2 - 2t_1 - 2t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in R)$$

Đó chính là phương trình tham số của mặt phẳng (P).

Cách 2: Lấy điểm $A(0, 0, 2) \in (P)$.

Mặt phẳng (P): $x+2y+3z-6=0$ có một vtpt là: $\vec{n}(1, 2, 3)$.

Gọi $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ là một vtcp của (P), ta có: $\vec{a}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow a_1+2a_2+3a_3=0$ (1)

- Ta đi tìm bộ ba thứ nhất (a_1, a_2, a_3) thoả mãn (1)
  - Cho $a_3=0$ thì (1) có dạng $a_1+2a_2=0$ (2)
  - Cho $a_1=2$ thì từ (2) ta có $a_2=-1$.

  $\Rightarrow$ Ta được vtcp thứ nhất $\vec{a}(2, -1, 0)$.

- Ta đi tìm bộ ba thứ hai (a_1, a_2, a_3) thoả mãn (1)
  - Cho a_2=0 thì (1) có dạng $a_1+3a_3=0$ (3)
  - Cho a_1=3 thì từ (3) ta có a_3=-1.

  ⇒ Ta được vtcp thứ hai $\vec{b}$ (3, 0, -1).
- Nhận thấy $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương.

Vậy $\vec{a}$, $\vec{b}$ là một cặp vtcp của (P)
- Khi đó :

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(0,0,2) \\ \text{hai vtcp } \vec{a}(2,-1,0) \ \& \ \vec{b}(3,0,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} x = 2t_1 + 3t_2 \\ y = -t_1 \\ z = 2 - t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in R)$$

Đó chính là phương trình tham số của mặt phẳng (P).

Cách 3: Đặt $x=3t_1$, $y=3t_2$, thay vào (1), suy ra $z=2-t_1-2t_2$. Ta được:

$$\begin{cases} x = 3t_1 \\ y = 3t_2 \\ z = 2 - t_1 - 2t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in R)$$

Đó chính là phương trình tham số của (P).

Bài toán 4: Chuyển phương trình tham số của mặt phẳng (P) về dạng tổng quát

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình tham số dưới dạng:

$$(P): \begin{cases} x = x_0 + a_1t_1 + b_1t_2 \\ y = y_0 + a_2t_1 + b_2t_2 \\ z = z_0 + a_3t_1 + b_3t_2 \end{cases}, t_1, t_2 \in R.$$

Để chuyển phương trình của (P) sang dạng tham số, ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Khử các tham số t_1, t_2 giữa các phương trình tham số trên.

Cách 2: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Ta có $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3) và $\vec{b}$ (b_1, b_2, b_3) là một cặp vtcp của (P).

Bước 2: vtpt $\vec{n}$ của (P) được xác định bởi: $\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$.

Bước 3: Lập phương trình của (P): đi qua M(x_0, y_0, z_0) có vtpt $\vec{n}$.

Ví dụ 4: Cho mặt phẳng (P) có phương trình tham số:

$$(P): \begin{cases} x = 1 - 2t_1 + 3t_2 \\ y = 3 + 2t_1 - 3t_2 \\ z = 2 + t_1 + 2t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in R).$$

Chuyển phương trình tham số của (P) sang dạng phương trình tổng quát.

Giải.

Cách 1: Khử các tham số t_1, t_2 từ hệ phương trình tham số của (P) ta được:

$x+y-4=0$.

Vậy phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là: $x+y-4=0$.

Cách 2.

- Mặt phẳng (P) có một cặp vtcp là:
  $\begin{cases} \vec{a}(-2,2,1) \\ \vec{b}(3,-3,2) \end{cases}$.
- Khi đó vtpt $\vec{n}$ của (P) được cho bởi:
  $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \right) = \vec{n}(7, 7, 0)$, chọn $\vec{n}(1, 1, 0)$.
- Khi đó:
  $(P): \begin{cases} \text{qua } M(1,3,2) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1,1,0) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x-1+y-3=0 \Leftrightarrow (P): x+y-4=0.$

Vậy phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là: $x+y-4=0$.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua A(3, 4, -5) và có cặp vtcp là $\vec{a}$ (3, 1, -1) và $\vec{b}$ (1, -2, 1).

BÀI GIẢI

- Ta có:
  $(P): \begin{cases} \text{qua } A(3,4,-5) \\ \text{hai vtcp } \vec{a}(3,1,-1) \,\&\, \vec{b}(1,-2,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} x = 4 + 3t_1 + t_2 & (1) \\ y = 4 + t_1 - 2t_2 & (2) \\ z = -5 - t_1 + t_2 & (3) \end{cases}, (t_1, t_2 \in R)$

  Đó chính là phương trình tham số của mặt phẳng (P).
- Từ (2) và (3) ta tính được
  $\begin{cases} t_1 = -y - 2z - 6 \\ t_2 = -y - z - 1 \end{cases}$, thay vào (1) ta được: $x+4y+7z+16=0$.

  Đó chính là phương trình tổng quát của mặt phẳng (P).

Bài 2 Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(1,0,0); B(0,2,0); C(2,0,2).
  a. Viết phương trình tham số mặt phẳng (ABC).
  b. Viết phương tổng quát của mặt phẳng (ABC).

BÀI GIẢI

a. Phương trình tham số mặt phẳng (ABC)
- Ta có:
  $(ABC): \begin{cases} \text{qua } A(1,0,0) \\ 2 \text{ vtcp } \overrightarrow{AB}(-1,2,0) \,\&\, \overrightarrow{AC}(1,0,2) \end{cases} \Leftrightarrow (ABC): \begin{cases} x = 1 - t_1 + t_2 \\ y = 2t_1 \\ z = 2t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in R)$

  Đó chính là phương trình tham số của mặt phẳng (ABC).

b. Phương tổng quát của mặt phẳng (ABC)

Cách 1: Từ phương trình tham số của (ABC)

- Thay phương trình 2, 3 vào 1, ta được $x=1-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z \Leftrightarrow 2x+y-z-2=0$.

Đó chính là phương trình tổng quát của (ABC).

Cách 2: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (P). Khi đó:

$$\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]=\left(\begin{vmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & -1\\2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 2\\1 & 0\end{vmatrix}\right)=\vec{n}(4,2,-2)$$

Khi đó:

$$(ABC):\begin{cases}\text{qua } A(1,0,0)\\ \text{vtpt } \vec{n}(2,1,-1)\end{cases}\Leftrightarrow (ABC): 2x+y-z-2=0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của mặt phẳng (ABC).

Cách 3: Phương trình tổng quát của (ABC) có dạng: ax+by+cz+d=0. (1)

- Vì A, B, C nằm trên (P) nên ta có hệ:

$$\begin{cases}a+d=0\\2b+d=0\\2a+2c+d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-d\\b=-d/2\\c=d/2\end{cases}.$$

Thay a, b, c vào (1) được: 2x+y-z-2=0.

Đó chính là phương trình tổng quát của (ABC).

Cách 4: Sử dụng tích hỗn tạp.

$M(x, y, x)\in(ABC)\Leftrightarrow D(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=0$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\-1 & 2 & 0\\1 & 0 & 2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{vmatrix}(x-1)+\begin{vmatrix}0 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}.y+\begin{vmatrix}-1 & 2\\1 & 0\end{vmatrix}.z=0\Leftrightarrow 2x+y-z-2=0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của (ABC).

Bài 3 Viết phương trình tham số và tổng quát của mặt phẳng (P)

a. Chứa Ox và đi qua A(1,-2,3).
b. Chứa Oy và đi qua B(-1,3,-2).
c. Chứa Oz và đi qua C(1,0,-2).

BÀI GIẢI

a. Mặt phẳng (P) chứa Ox $\Rightarrow O\in(P)$ và (P) có một vtcp là $\vec{a}(1, 0, 0)$. Vậy:

- *Phương trình tham số*

$$(P):\begin{cases}\text{qua } O(0,0,0)\\ \text{hai vtcp } \vec{a}(1,0,0)\ \&\ \overrightarrow{OA}(1,-2,3)\end{cases}\Leftrightarrow (P):\begin{cases}x=t_1+t_2 & (1)\\y=-2t_2 & (2)\\z=3t_2 & (3)\end{cases},\ t_1, t_2\in R.$$

Đó chính là phương trình tham số của mặt phẳng (P).

- *Phương trình tổng quát*

Cách 1: Khử các tham số t_1, t_2 giữa các phương trình tham số trên.

Từ (2), (3), ta được 3y+2z=0.

Đó chính là phương trình tổng quát của (P).

Cách 2: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (P). Khi đó:

$$\vec{n}=\left(\begin{vmatrix}0&0\\-2&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\3&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\1&-2\end{vmatrix}\right)=\vec{n}\,(0,-3,-2)$$

Khi đó

$$(P):\begin{cases}\text{qua } O(0,0,0)\\ \text{vtpt } \vec{n}(0,-3,-2)\end{cases}\Leftrightarrow (P): 3y+2z=0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của (P).

Cách 3: Sử dụng tích hỗn tạp.

$M(x, y, x)\in(P) \Leftrightarrow D(\overrightarrow{OM},\vec{a},\overrightarrow{OA})=0$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&0\\1&-2&3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}0&0\\-2&3\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}0&1\\3&1\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}1&0\\1&-2\end{vmatrix}z=0\Leftrightarrow 3y+2z=0 \qquad (*)$$

Đó chính là phương trình tổng quát của (P).

b. và c. làm tương tự câu a.

Bài 4. Viết phương trình tham số và tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua A(1, 0, 1); B(2, 1, 2) và vuông góc với mặt phẳng (Q): x+2y+3z+3=0.

BÀI GIẢI

Vectơ $\overrightarrow{AB}$ (1, 1, 1) là một vtcp của (P).

Gọi $\vec{n}_1$ là vtpt của (Q) $\Rightarrow$ $\vec{n}_1$ (1, 2, 3) cũng là một vtcp của (P).

Nhận thấy rằng $\overrightarrow{AB}$, $\vec{n}_1$ không cùng phương.

- *Phương trình tham số của (P)*

$$(P):\begin{cases}\text{qua } A(1,0,1)\\ \text{hai vtcp } \vec{n}_1(1,2,3)\ \&\ \overrightarrow{AB}(1,1,1)\end{cases}\Leftrightarrow (P):\begin{cases}x=1+t_1+t_2 & (1)\\ y=2t_1+t_2 & (2)\\ z=1+3t_1+t_2 & (3)\end{cases},\ (t_1, t_2\in R)$$

- *Phương trình tổng quát của (P)*

Cách 1: Khử các tham số t_1, t_2 giữa các phương trình tham số của (P).

- Lấy (1)-(2) suy ra $x-y=1-t_1$ (4)
- Lấy (2)-(3) suy ra $y-z=-1-t_1$ (5)
- Lấy (4)-(5) suy ra $x-2y+z=2 \Leftrightarrow x-2y+z-2=0$.

Đó chính là phương trình tổng quát của (P).

Cách 2: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (P). Khi đó:

$$\vec{n}=\left(\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}\right)=\vec{n}\,(-1, 2, -1)$$

Khi đó:

$$(P):\begin{cases}\text{qua } A(1,0,1)\\ \text{vtpt } \vec{n}(1,-2,1)\end{cases}\Leftrightarrow (P): (x-1)-2y+(z-1)=0 \Leftrightarrow (P): x-2y+z-2=0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của (P).

Cách 3: Sử dụng tích hỗn tạp.

$M(x, y, x) \in (P) \Leftrightarrow D(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{AB}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}(x-1) + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.y + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}(z-1) = 0$$

$\Leftrightarrow$ x-2y+z-2=0.

Đó chính là phương trình tổng quát của (P).

Bài 5. (ĐHDL-97): Viết phương trình tham số và tổng quát của mặt phẳng (P) chứa gốc toạ độ và vuông góc với hai mặt phẳng có phương trình (P_1): x-y+z-7=0 và (P_2): 3x+2y-12z+5=0.

BÀI GIẢI

- Gọi $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ theo thứ tự là vtpt của mặt phẳng (P_1), (P_2), ta có:
  $\vec{n}_1(1, -1, 1)$; $\vec{n}_2(3, 2, -12)$.
- Gọi (P) là mặt phẳng chứa gốc toạ độ và vuông góc với (P_1) và (P_2).

- *Phương trình tham số*

$$(P): \begin{cases} \text{qua } O(0,0,0) \\ \text{hai vtcp } \vec{n}_1(1,-1,1) \& \vec{n}_2(3,2,-12) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} x = t_1 + 3t_2 & (1) \\ y = -t_1 + 2t_2 & (2) \\ z = t_1 - 12t_2 & (3) \end{cases}, \ t_1, t_2 \in R$$

- *Phương trình tổng quát*

Cách 1: Khử các tham số t_1, t_2 giữa các phương trình tham số trên.

- Lấy (1)+(2) suy ra $x+y=5t_2$ (4)
- Lấy (2)+(3) suy ra $x+z=-10t_2$ (5)
- Thay (4) vào (5), ta được x+z=-2(x+y) $\Leftrightarrow$ 3x+2y+z=0.

Đó chính là phương trình tổng quát của (P).

Cách 2: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (P). Khi đó:

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -12 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -12 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = \vec{n}(10, 15, 5)$$

Khi đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } O(0,0,0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(2,3,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 3x+2y+z=0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của (P).

Cách 3: Sử dụng tích hỗn tạp.

$M(x, y, x) \in (P) \Leftrightarrow D(\overrightarrow{OM}, \vec{a}, \overrightarrow{OA}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -12 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -12 \end{vmatrix}x + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -12 & 3 \end{vmatrix}y + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.z = 0 \Leftrightarrow 3x+2y+z=0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của (P).

III. TỔNG KẾT PHƯƠNG PHÁP VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Bài toán: Lập phương trình mặt phẳng (P).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

a. *Để xác định phương trình tham số của mặt phẳng (P)*: nếu (P) đã cho dưới dạng tổng quát thì chuyển (P) về dạng tham số còn không thì thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định một điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (P)$.

Bước 2: Xác định một cặp vtcp $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ và $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ của (P).

Bước 3: Áp dụng bài toán 2.

Chú ý. Một mặt phẳng sẽ có vô số phương trình tham số, bởi nó đi qua vô số điểm và có vô số cặp vtcp.

b. *Để xác định phương trình tổng quát của mặt phẳng (P)*: nếu (P) đã cho dưới dạng tham số thì chuyển (P) về dạng tổng quát còn không thì thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định một điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (P)$.

Bước 2: Xác định vtpt $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ của (P).

Bước 3: Áp dụng bài toán 1.

Chú ý.

- Một mặt phẳng có duy nhất một phương trình tổng quát.
- Trong trường hợp biết cặp vtcp $\vec{a}$, $\vec{b}$ của (P) muốn có phương trình tổng quát của (P) ta sử dụng tích hỗn tạp:

$$M(x, y, x) \in (P) \Leftrightarrow D(\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}) = 0. \quad (2)$$

Từ (2) ta có được phương trình tổng quát của (P).

c. *Phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm*: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ và $C(x_3, y_3, z_3)$ không thẳng hàng có dạng:

$$(P): \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (P): \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}.(x - x_1) + \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix}.(y - y_1) + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.(z - z_1) = 0$$

d. *Phương trình mặt phẳng theo các đoạn chắn*: mặt phẳng (P) cắt trục Ox tại A(a, 0, 0), trục Oy tại B(0, b, 0), trục Oz tại C(0, 0, c) có phương trình

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

e. *Phương trình chuẩn tắc của mặt phẳng*: Giả sử p>0 là chiều dài đường vuông góc OH hạ từ gốc toạ độ lên mặt phẳng (P); giả sử $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$ là cosin chỉ phương của vectơ $\overrightarrow{OH}$, khi đó phương trình chuẩn tắc của mặt phẳng (P) có dạng:

$$(P): x.\cos\alpha_x + y.\cos\alpha_y + z\cos\alpha_z - p = 0$$

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm một cặp vtcp của các mặt phẳng sau:

a. (P): $\begin{cases} x = 1 + t_1 + t_2 \\ y = 2t_1 + t_2 \\ z = 1 + 3t_1 + t_2 \end{cases}$, $(t_1, t_2 \in R)$.

b. (P): x-2y-1=0.

c. (P): x+4y+7z+16=0.

Bài tập 2. Tìm một vtpt của các mặt phẳng sau:

a. (P): $\begin{cases} x = 1 + t_1 + t_2 \\ y = 2t_1 + t_2 \\ z = 1 + 3t_1 + t_2 \end{cases}$, $(t_1, t_2 \in R)$.

b. (P): x-2y-1=0.

c. (P): x+4y+7z+16=0.

Bài tập 3. Chuyển dạng phương trình tổng quát của (P) sang dạng phương trình tham số trong các trường hợp sau:

a. (P): x+2y+3z-12=0.

b. (P): 3x+2y+z-6=0.

c. (P): x+2y-4=0.

d. (P): 2y+3z-6=0

Bài tập 4. Chuyển dạng phương trình tham số của (P) sang dạng phương trình tổng quát trong các trường hợp sau:

a. (P): $\begin{cases} x = 1 - t_1 + t_2 \\ y = 2t_1 \\ z = 2t_2 \end{cases}$, $(t_1, t_2 \in R)$.

b. (P): $\begin{cases} x = 1 + t_1 + t_2 \\ y = 2t_1 + t_2 \\ z = 1 + 3t_1 + t_2 \end{cases}$, $(t_1, t_2 \in R)$.

Bài tập 5. Cho mặt phẳng (P) có phương trình tham số:

(P): $\begin{cases} x = -1 + t_1 \\ y = 2 + t_2 \\ z = 3 - t_2 \end{cases}$, $(t_1, t_2 \in R)$.

a. Lập phương trình tổng quát của (P).

b. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) đi qua điểm A(1, 2, 3) và song song với (P).

Bài tập 6. Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

a. Đi qua điểm A(0, -1, 4) và có cặp vtcp là $\vec{a}$ (3, 2, 1) và $\vec{b}$ (-3, 0, 1).

b. Đi qua hai điểm B(4, -1, 1), C(3, 1, -1) và cùng phương với trục Ox.

Bài tập 7. Cho tứ diện ABCD có A(5, 1, 3); B(1, 6, 2); C(5,0,4), D(4, 0, 6).

a. Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ABD), (BCD).

b. Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát mặt phẳng (P) đi qua cạnh AB và song song với cạnh CD.

Bài tập 8. Viết phương trình tham số và tổng quát của mặt phẳng (P)

a. Đi qua ba điểm A(1,0,0); B(0,2,0); C(0,0,3).

b. Đi qua A(1, 2, 3), B(2, 2, 3) và vuông góc với (Q): x+2y+3z+4=0.

c. Chứa Ox và đi qua A(4, -1, 2).

d. Chứa Oy và đi qua B(1, 4, -3).

Bài tập 9. Cho hai điểm A(3, 2, 3); B(3, 4, 1) trong không gian Oxyz.

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) là trung trực của AB.

b. Viết phương mặt phẳng (Q) qua A, vuông góc với (P) và vuông góc với (yOz).

c. Viết phương mặt phẳng (R) qua A và song song với (P).

CHỦ ĐỀ 3
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho hai mặt phẳng

(P_1): $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ có một vtpt $\vec{n}(A_1, B_1, C_1)$.

(P_2): $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ có một vtpt $\vec{m}(A_2, B_2, C_2)$.

Căn cứ vào số đường thẳng chung của (P_1), (P_2) ta có 3 trường hợp sau:

a. *(P_1) và (P_2) không có đường thẳng chung*: ta nói $(P_1)//(P_2)$.

Vậy $(P_1)//(P_2) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$ (tức là $\vec{n}//\vec{m}$ và $(P_1)\cap(P_2)=\varnothing$)

Chú ý: Khoảng cách d giữa hai mặt phẳng song song với nhau

(P_1): $Ax+By+Cz+D_1=0$ và (P_2): $Ax+By+Cz+D_2=0$

được cho bởi công thức: $d=\dfrac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

b. *Hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) chỉ có một đường thẳng chung* (có hai điểm chung): ta nói (P_1) và (P_2) cắt nhau. Đường thẳng chung được gọi là giao tuyến của (P_1) và (P_2), có phương trình là:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

Vậy (P_1) cắt (P_2) $\Leftrightarrow A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$ (tức là $\vec{n}$, $\vec{m}$ không cộng tuyến) hoặc một trong ba định thức sau đây phải khác không:

$$\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\B_2 & C_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}C_1 & A_1\\C_2 & A_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}A_1 & B_1\\A_2 & B_2\end{vmatrix}.$$

Khi đó số đo góc α $(0\le\alpha\le\frac{\pi}{2})$ tạo bởi hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) được tính theo công thức:

$$\cos\alpha=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Trường hợp đặc biệt $(P_1)\perp(P_2)$

$\Leftrightarrow \vec{n}\perp\vec{m} \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{m}=0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

c. *Hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có hai đường thẳng chung phân biệt* (có ba điểm chung không thẳng hàng): ta nói $(P_1)\equiv(P_2)$.

Vậy $(P_1)\equiv(P_2) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$

(tức là $\vec{n}//\vec{m}$ và (P_1), (P_2) có một điểm chung).

d. *Mở rộng.*

(i). Nếu ba mặt phẳng

(P_1): $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,
(P_2): $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,
(P_3): $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$

đi qua cùng một đường thẳng, thì:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0.$$

(ii). Giao điểm (nếu có, tức $\Delta\neq 0$) của ba mặt phẳng

(P_1): $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,
(P_2): $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,
(P_3): $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$

có toạ độ cho bởi:

$$x=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix};\ y=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix};\ z=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}$$

(iii). Nếu bốn mặt phẳng

(P_1): $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,
(P_2): $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,
(P_3): $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$,
(P_4): $A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0$

đi qua cùng một điểm, thì:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0.$$

Chú ý: Trong trường hợp (P_1), (P_2) cho bởi:

$$(P_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ và } (P_2): \begin{cases} x = x_0 + a_1t_1 + b_1t_2 \\ y = y_0 + a_2t_1 + b_2t_2\,, \ (t_1, t_2\in R) \\ z = z_0 + a_3t_1 + b_3t_2 \end{cases}$$

Để xét vị trí tương đối của (P_1) và (P_2) ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

Phương pháp 1. Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình (P_2) về dạng tổng quát.

Bước 2: Kết luận.

Phương pháp 2. Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thay phương trình tham số của (P_2) vào (P_1), ta được:

$$At_1+Bt_2+C=0 \qquad (1)$$

Bước 2: Xét các khả năng sau:

- Nếu $A=B=C=0 \Leftrightarrow$ (1) luôn đúng $\Leftrightarrow (P_1)\equiv(P_2)$.
- Nếu $A=B=0$ & $C\neq 0 \Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow (P_1)//(P_2)$.
- Nếu $A^2+B^2>0 \Leftrightarrow (P_1)\cap(P_2)=(d)$.

Nhận xét: Với các bài toán chứa tham số cần giải và biện luận thông thường ta chọn phương pháp 2.

II.CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho hai mặt phẳng:

$$(P_1): x-2y+z-2=0,\ (P_2): \begin{cases} x = 1 + t_1 + t_2 \\ y = 2t_1 + t_2 \\ z = 1 + 3t_1 + t_2 \end{cases},\ (t_1, t_2 \in R).$$

CMR $(P_1)\equiv(P_2)$.

Giải.

Cách 1

Chuyển phương trình (P_2) về dạng tổng quát.

- Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (P_2), ta có:

$$\vec{n}\left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}\,(-1, 2, -1).$$

- Khi đó:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } A(1,0,1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1,-2,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): 1(x-1)-2(y-0)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow (P_2): x-2y+z-2=0.$$

Vậy $(P_1)\equiv(P_2)$.

Cách 2. Thay phương trình tham số của (P_2) vào (P_1), ta được:

$(1+t_1+t_2)-2(2t_1+t_2)+(1+3t_1+t_2)-2=0 \Leftrightarrow 0=0$ luôn đúng.

Vậy $(P_1)\equiv(P_2)$.

Chú ý: Cũng có thể chứng minh, bằng cách khẳng định (P_1), (P_2) có cũng một vtpt và có một điểm chung.

Ví dụ 2: Cho hai mặt phẳng:

$$(P_1): x-3y+2z+8=0,\ (P_2): \begin{cases} x = 1 + t_1 - t_2 \\ y = -1 + t_1 + t_2 \\ z = 1 + t_1 + 2t_2 \end{cases},\ (t_1, t_2 \in R).$$

CMR $(P_1)//(P_2)$, từ đó xác định khoảng cách giữa (P_1) và (P_2).

Giải.

Cách 1. Chuyển phương trình (P_2) về dạng tổng quát.

- Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (P_2), ta có:

$$\vec{n}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}\,(1, -3, 2).$$

- Khi đó:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } A(1,-1,1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1,-3,2) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): x-1-3(y+1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow (P_2): x-3y+2z-6=0.$$

Vậy $(P_1)//(P_2)$.

Khi đó khoảng cách giữa (P_1) và (P_2) được cho bởi:

$$d=\frac{|8+6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}}=\sqrt{14}.$$

Cách 2. Thay phương trình tham số của (P_2) vào (P_1), ta được:

$(1+t_1-t_2)-3(-1+t_1+t_2)+2(1+t_1+2t_2)+8=0 \Leftrightarrow 14=0$ mâu thuẫn.

Vậy $(P_1)//(P_2)$.

Khi đó khoảng cách giữa (P_1) và (P_2) được cho bởi:

$$d=d(A,(P_1))=\frac{|1-3(-1)+2.1+8|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}}=\sqrt{14}.$$

Ví dụ 3: Cho hai mặt phẳng:

$$(P_1): x-2y+z-2=0,\ (P_2): \begin{cases} x=1-2t_1+3t_2 \\ y=3+2t_1-3t_2 \\ z=2+t_1+2t_2 \end{cases}, (t_1, t_2\in R).$$

CMR (P_1) và (P_2) cắt nhau, từ đó xác định góc giữa (P_1) và (P_2).

Giải.

Chuyển phương trình (P_2) về dạng tổng quát, ta được: $x+y-4=0$.

Vậy $(P_1)\cap(P_2)=(d)$.

Khi đó số đo góc α $(0\le\alpha\le\frac{\pi}{2})$ tạo bởi hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) được tính theo công thức:

$$\cos\alpha=\frac{|1.1+(-2).1+1.0|}{\sqrt{1+4+1}.\sqrt{1+1}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 4: Cho hai mặt phẳng:

$$(P_1): m^2x+my-z+2=0,\ (P_2): \begin{cases} x=1+t_1+t_2 \\ y=-3-t_2 \\ z=-t_1 \end{cases}, (t_1, t_2\in R).$$

Biện luận theo m vị trí tương đối giữa (P_1) và (P_2).

Giải.

Thay phương trình tham số của (P_2) vào (P_1), ta được:

$$m^2(1+t_1+t_2)+m(-3-t_2)-(-t_1)+2=0 \Leftrightarrow (m^2-1)t_1+(m^2-m)t_2+m^2-3m+2=0 \quad (1)$$

Ta đi xét ba khả năng sau:

- **Nếu $m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm1$.**
  - **Với m=1, khi đó : (1) luôn đúng $\Leftrightarrow (P_1)\equiv(P_2)$.**
  - **Với m=-1, khi đó : (1) $\Leftrightarrow 2t_2+6=0 \Leftrightarrow (P_1)$ và (P_2) cắt nhau.**
- **Nếu $m^2-1\neq0 \Leftrightarrow m\neq\pm1 \Leftrightarrow (P_1)$ và (P_2) cắt nhau.**

Vậy:

- **Với m=1, $(P_1)\equiv(P_2)$.**
- **Với $m\neq1$, (P_1) và (P_2) cắt nhau.**

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Xét vị trí tương đối của các cặp mặt phẳng sau:

a. (P_1): y-z+4=0 và (P_2): $\begin{cases} x=3+2t_1 \\ y=1-t_1-4t_2 \\ z=5-t_1-4t_2 \end{cases}$, $(t_1, t_2\in R)$.

b. (P_1): 9x+10y-7z+9=0 và (P_2): $\begin{cases} x=1+2t_1+3t_2 \\ y=7+t_1-2t_2 \\ z=3+4t_1+t_2 \end{cases}$, $(t_1, t_2\in R)$.

c. (P_1): x+y-z-4=0 và (P_2): $\begin{cases} x=1+t_1-t_2 \\ y=2+2t_1-t_2 \\ z=-1+t_1+t_2 \end{cases}$, $(t_1, t_2\in R)$.

CHỦ ĐỀ 4
CHÙM MẶT PHẲNG

I. CHÙM MẶT PHẲNG

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) cắt nhau theo giao tuyến (d). Tập hợp tất cả các mặt phẳng cùng đi qua đường thẳng (d) gọi là một chùm mặt phẳng, đường thẳng (d) gọi là trục của chùm, các mặt phẳng (P_1) và (P_2) gọi là hai mặt phẳng cơ sở của chùm.

2. PHƯƠNG TRÌNH CỦA CHÙM MẶT PHẲNG

Giả sử ta có phương trình tổng quát của (P_1) và (P_2) trong không gian Oxyz

(P_1): $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,

(P_2): $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ với $A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$.

Khi đó phương trình :

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+ \mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad (1)$$

với $\lambda^2+\mu^2>0$, biểu diễn mọi mặt phẳng của chùm tạo bởi (P_1) và (P_2).

Nhận xét:

Nếu $\lambda=0 \Rightarrow \mu\neq0$, (1) chính là phương trình mặt phẳng (P_2).

Nếu $\mu=0 \Rightarrow \lambda\neq0$, (1) chính là phương trình mặt phẳng (P_1).

Nếu $\lambda\neq0$ và $\mu\neq0$, (1) cho phương trình của một mặt phẳng khác hai mặt phẳng (P_1) và (P_2). Trong trường hợp này, có thể đặt $m=\frac{\mu}{\lambda}$ và (1) trở thành: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+ m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ (2)

hoặc $(A_1+ mA_2)x+(B_1+mB_2)y+(C_1+mC_2)z+(D_1+mD_2)=0$ (2')

Khi đó ta có vtpt $\vec{n}(A_1+ mA_2, B_1+mB_2, C_1+mC_2)$.

Chú ý. Như vậy để xác định phương trình của chùm mặt phẳng xác định bởi:

a. Hai mặt phẳng cơ sở (P_1) và (P_2), thì nhất thiết phải đưa phương trình của (P_1) và (P_2) về dạng tổng quát.

b. Trục (d), thì nhất thiết phải đưa phương trình của (d) về dạng tổng quát.

Ví dụ 1: Lập phương trình chùm mặt phẳng xác định bởi (P), (Q) biết:

a. (P): $2x+y+z+4=0$ và (Q): $x-y+3z-1=0$.

b. (P): $x+y+z+1=0$ và (Q): $\begin{cases} x = 1 - 2t_1 + 3t_2 \\ y = 3 + 2t_1 - 3t_2 \\ z = 2 + t_1 + 2t_2 \end{cases}$.

Giải.

a. Chùm mặt phẳng xác định bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) có dạng:

$n(2x+y+z+4)+m(x-y+3z-1)=0$

$\Leftrightarrow$ (P): $(2n+m)x+(n-m)y+(n+3m)z+4n-m=0$

b. Chuyển phương trình (Q) về dạng tổng quát bằng cách khử các tham số t_1, t_2 từ hệ phương trình tham số của (P) ta được x+y-4=0.

Chùm mặt phẳng xác định bởi (P) và (Q) có dạng:

$$n(x+y+z+1)+m(x+y-4)=0 \Leftrightarrow (n+m)x+(n+m)y+nz+n-4m=0.$$

Ví dụ 2: Lập phương trình chùm mặt phẳng có trục là đường thẳng (d) biết:

a. $(d): \begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$.

b. $(d): \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-4}$.

c. $(d): \begin{cases} x = 2 + t & (1) \\ y = 1 - 2t & (2) \\ z = t - 3 & (3) \end{cases}, (t \in R)$.

Giải.

a. Chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) có dạng:

$$n(2x-y+z-4)+m(x+y-3z-1)=0 \Leftrightarrow (P): (2n+m)x-(n-m)y+(n-3m)z-4n-m=0$$

b. Chuyển phương trình (d) về dạng tổng quát:

$$(d): \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-4} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 4y + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Khi đó chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) có dạng:

$$n(x+y-2)+m(4y+z-2)=0 \Leftrightarrow (P): nx+(n+4m)y+mz-2n-2m=0.$$

c. Chuyển phương trình (d) về dạng tổng quát.

- Rút t từ phương trình (1), ta được t=x-2.
- Thay giá trị của t=x-2 vào (2), (3), ta được:

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x - z - 5 = 0 \end{cases}.$$

Khi đó chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) có dạng:

$$n(2x+y-5)+m(x-z-5)=0 \Leftrightarrow (P): (2n+m)x+ny-mz-5n-5m=0$$

3. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1. *Chùm mặt phẳng* thoả mãn điều kiện K cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để xác định một mặt phẳng của chùm cho bởi (2) hoặc (2'), ta cần xác định giá trị tham số m dựa vào một giả thiết nào đó được thiết lập cho mặt phẳng. Các giả thiết thường gặp:

3.1. Mặt phẳng của chùm đi qua một điểm M cho trước

Khi đó, thay toạ độ của M vào (2) hoặc (2') ta nhận được m.

Ví dụ 3: Lập phương trình mặt phẳng đi qua M(1, 0, 1) và chứa đường thẳng (d) cho bởi:

a. (d): $\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$.

b. (d): $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-4}$.

c. (d): $\begin{cases} x = 2 + t & (1) \\ y = 1 - 2t & (2) \\ z = t - 3 & (3) \end{cases}$, $(t \in R)$.

Giải.

a. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d) ⇒ (P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) có dạng:

$$2x-y+z-4+m(x+y-3z-1)=0 \Leftrightarrow (P): (2+m)x-(1-m)y+(1-3m)z-4-m=0 \quad (1)$$

Điểm $M(1, 0, 1) \in (P) \Leftrightarrow (2+m).1-(1-m).0+(1-3m).1-4-m=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}$.

Thay $m=-\frac{1}{3}$ vào (1), ta được (P): $5x-4y+6z-13=0$.

b. Chuyển phương trình (d) về dạng tổng quát:

(d): $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 4y + z - 2 = 0 \end{cases}$.

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d) ⇒ (P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d), có dạng:

$$x+y-2+m(4y+z-2)=0 \Leftrightarrow (P): x+(1+4m)y+mz-2-2m=0 \quad (2)$$

Điểm $M(1, 0, 1) \in (P) \Leftrightarrow 1+(1+4m).0+m.1-2-2m=0 \Leftrightarrow m=-1$.

Thay m=-1 vào (2), ta được (P): $x-3y-z=0$.

c. Chuyển phương trình (d) về dạng tổng quát bằng cách:

- Rút t từ phương trình (1), ta được $t=x-2$.
- Thay giá trị của $t=x-2$ vào (2), (3), ta được :

$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x - z - 5 = 0 \end{cases}$.

Đó chính là phương trình tổng quát của đường thẳng (d).

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d) ⇒ (P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) có dạng:

$$2x+y-5+m(x-z-5)=0 \Leftrightarrow (P): (2+m)x+y-mz-5-5m=0 \quad (4)$$

Điểm $M(1, 0, 1) \in (P) \Leftrightarrow (2+m).1+0-m.1-5-5m=0 \Leftrightarrow m=-\frac{3}{5}$.

Thay $m=-\frac{3}{5}$ vào (4), ta được (P): $7x+5y+3z-10=0$.

3.2. Mặt phẳng của chùm song song với một mặt phẳng (Q) cho trước

Khi đó, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định một vtpt $\vec{n}_1(A, B, C)$ của (Q).

Bước 2: Mặt phẳng của chùm song song với mặt phẳng (Q)

$$\Leftrightarrow \frac{A_1 + mA_2}{A} = \frac{B_1 + mB_2}{B} = \frac{C_1 + mC_2}{C},$$

từ đây ta nhận được m.

Ví dụ 4: Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và song song với mặt phẳng (Q) biết :

$$(d): \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 4y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

và (Q) có phương trình:

a. (Q): x-3y-z+2=0.

b. (Q): $\begin{cases} x = t_1 + 3t_2 \\ y = -t_1 + 2t_2 \\ z = t_1 - 12t_2 \end{cases}$, $(t_1, t_2 \in R)$.

Giải.

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d) $\Rightarrow$ (P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) có dạng:

$$x+y-2+m(4y+z-2)=0 \Leftrightarrow (P): x+(1+4m)y+mz-2-2m=0. \quad (1)$$

a. Vì (P)//(Q): x-3y-z+2=0 $\Leftrightarrow \frac{1}{1} = \frac{1+4m}{-3} = \frac{m}{-1} \Leftrightarrow m=-1$.

Thay m=-1 vào (1), ta được (P): x-3y-z=0.

b. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (Q). Khi đó:

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -12 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -12 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = \vec{n}(10, 15, 5), \text{ chọn } \vec{n}(2, 3, 1)$$

Mặt phẳng (P)//(Q) $\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1+4m}{3} = \frac{m}{1}$ vô nghiệm.

Vậy không tồn tại mặt phẳng chứa (d) và song song với (Q).

3.3. Mặt phẳng của chùm vuông góc với một mặt phẳng (Q) cho trước

Khi đó, thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định một vtpt $\vec{n}_1(A, B, C)$ của (Q).

Bước 2: Mặt phẳng của chùm vuông góc với mặt phẳng (Q)

$\Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n}_1=0$ (với $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (2'))

$\Leftrightarrow (A_1+ mA_2)A+(B_1+mB_2)B+(C_1+mC_2)C=0$,

từ đây ta nhận được m.

Ví dụ 5: Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và vuông góc với mặt phẳng (Q) biết

$$(d): \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 4y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

và mặt phẳng (Q) có phương trình:

a. (Q): x+y-3z+2=0.

b. $(Q): \begin{cases} x = 1 + t_1 + t_2 \\ y = 2t_1 + t_2 \\ z = 1 + 3t_1 + t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in R)$

Giải.

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d) ⇒ (P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) có dạng:

$$x+y-2+m(4y+z-2)=0 \Leftrightarrow (P): x+(1+4m)y+mz-2-2m=0 \qquad (1)$$

Gọi $\vec{m}$ là vtpt của (P), ta có $\vec{m}$ (1, 1+4m, m).

a. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (Q), ta có $\vec{n}$ (1, 1, -3).

Vì $(P)\perp(Q) \Leftrightarrow \vec{m} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{m}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 1.1+(1+4m).1+ m(-3)=0 \Leftrightarrow m=-2$.

Thay m=-2 vào (1), ta được (P): x-7y-2z+2=0.

b. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (Q), ta có:

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}\,(-1, 2, -1).$$

Vì $(P)\perp(Q) \Leftrightarrow \vec{m} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{m}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 1.(-1)+(1+4m).2+ m.(-1)=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{7}$.

Thay $m=-\frac{1}{7}$ vào (1), ta được (P): 7x+3y-z-12=0.

3.4. Mặt phẳng của chùm song song với một đường thẳng (Δ) cho trước

Khi đó, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định một vtcp $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3) của (Δ).

Bước 2: Mặt phẳng của chùm song song với một đường thẳng (Δ)

$$\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow (A_1+ mA_2)a_1+(B_1+mB_2)a_2+(C_1+mC_2)a_3=0,$$

từ đây ta nhận được m.

Ví dụ 6: Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và song song với đường thẳng (Δ) biết:

$$(\Delta): \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 4y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

và đường thẳng (Δ) có phương trình:

a. (d): $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$.

b. (d): $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{3}$.

c. (d): $\begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$.

Giải.

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d)⇒(P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) có dạng:

$$x+y-2+m(4y+z-2)=0 \Leftrightarrow (P): x+(1+4m)y+mz-2-2m=0 \quad (1)$$

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (P), ta có $\vec{n}(1, 1+4m, m)$.

a. Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có:

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = \vec{a}(4, 14, 8), \text{ chọn } \vec{a}(2,7,4).$$

Vì $(P)//(\Delta) \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow 1.2+(1+4m).7+m.4=0 \Leftrightarrow m=-\frac{9}{32}$.

Thay $m=-\frac{9}{32}$ vào (1), được (P): $32x-4y-9z-46=0$.

b. Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có: $\vec{a}(3, 4, 3)$.

Vì $(P)//(\Delta) \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow 1.3+(1+4m).4+m.3=0 \Leftrightarrow m=-\frac{7}{19}$.

Thay $m=-\frac{7}{19}$ vào (1), ta được (P): $19x-9y-7z-24=0$.

c. Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có: $\vec{a}(-1, 2, 2)$.

Vì $(P)//(\Delta) \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow 1.(-1)+(1+4m).2+m.2=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{10}$.

Thay $m=-\frac{1}{10}$ vào (1), ta được (P): $10x+6y-z-18=0$.

3.5. Mặt phẳng của chùm vuông góc với một đường thẳng (Δ) cho trước

Khi đó, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định một vtcp $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ của (Δ).

Bước 2: Mặt phẳng của chùm vuông góc với đường thẳng (Δ)

$$\Leftrightarrow \frac{A_1 + mA_2}{a_1} = \frac{B_1 + mB_2}{a_2} = \frac{C_1 + mC_2}{a_3},$$

từ đây ta nhận được m.

Ví dụ 7: Cho hai đường thẳng (d) và (Δ) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} 3x - 2y + z - 3 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} ; \ (\Delta): \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 5t \end{cases}, (t \in R).$$

Lập phương trình mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (Δ).

Giải.

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d)⇒(P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) có dạng:

$$3x-2y+z-3+m(x-2z)=0 \Leftrightarrow (3+m)x-2y+(1-2m)z-3=0 \qquad (1)$$

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (P), ta có $\vec{n}$ (3+m, -2, 1-2m),

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có: $\vec{a}$ (-1, 2, -5).

Mặt phẳng (P)⊥(Δ) $\Leftrightarrow \dfrac{3+m}{-1} = \dfrac{-2}{2} = \dfrac{1-2m}{-5} \Leftrightarrow m=-2$

Thay m=-2 vào (1), ta được (P): x-2y+5z-3=0.

3.6. Mặt phẳng của chùm tạo với một mặt phẳng (Q) một góc α bất kỳ

Khi đó, thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định một vtpt $\vec{n}_1$(A, B, C) của (Q).

Bước 2: Mặt phẳng của chùm tạo với mặt phẳng (P) một góc α

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{|A(A_1 + mA_2) + B(B_1 + mB_2) + C(C_1 + mC_2)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{(A_1 + mA_2)^2 + (B_1 + mB_2)^2 + (C_1 + mC_2)^2}}$$

từ đây ta nhận được m.

Ví dụ 8: Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tạo với mặt phẳng (Q) một góc bằng 60^0 biết:

$$(d); \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \text{ và (Q): } x+2y-2z+2=0$$

Giải.

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d) ⇒ (P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) (P) có dạng:

$$x+y-2+m(y+z-2)=0 \Leftrightarrow (P): x+(1+m)y+mz-2-2m=0 \qquad (1).$$

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (P), ta có $\vec{n}$ (1, 1+m, m),

Gọi $\vec{m}$ là vtpt của (Q), ta có $\vec{n}$ (1, 2, -2).

Vì g((P),(Q))=60^0

$$\Leftrightarrow \frac{|1.1 + (1+m).2 + m.(-2)|}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{1+(1+m)^2+m^2}} = \cos 60^0$$

$$\Leftrightarrow m^2+m-1=0 \Leftrightarrow m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

- Với m_1, thay vào (1), ta được (P_1): $x+(1+m_1)y+m_1z-2-2m_1=0$.
- Với m=-2, thay vào (1), ta được (P_2): $x+(1+m_2)y+m_2z-2-2m_2=0$.

Kết luận: tồn tại hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) tm điều kiện đầu bài.

3.7. Mặt phẳng của chùm tạo với một đường thẳng (Δ) một góc α bất kỳ

Khi đó, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định một vtcp $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3) của (Δ).

Bước 2: Mặt phẳng của chùm tạo với đường thẳng (Δ) một góc α

$$\sin\alpha = \frac{|(A_1 + mA_2)a_1 + (B_1 + mB_2)a_2 + (C_1 + mC_2)a_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{(A_1 + mA_2)^2 + (B_1 + mB_2)^2 + (C_1 + mC_2)^2}}$$

từ đây ta nhận được m.

Ví dụ 9: Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tạo với đường thẳng (Δ) một góc bằng 60^0 biết :

$$(d): \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \text{ và } (\Delta): \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{-1}$$

Giải.

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d)⇒ (P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) có dạng:

$x+y-2+m(y+z-2)=0 \Leftrightarrow$ (P): $x+(1+m)y+mz-2-2m=0$ (1)

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (P), ta có $\vec{n}$ (1, 1+m, m),

Gọi $\vec{a}$ là vtcp của (Δ), ta có $\vec{a}$ (2, 1, -1).

Vì g((Δ),(P))=60^0

$$\Leftrightarrow \sin 60^0 = \frac{|2.1 + (1+m).1 + m.(-1)|}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+(1+m)^2+m^2}} \Leftrightarrow m^2+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \end{array}\right.$$

- Với m=-1, thay vào (1), ta được (P_1): x-z=0.
- Với m=0, thay vào (1), ta được (P_2): x+y-2=0.

Kết luận: tồn tại hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) tm điều kiện đầu bài.

Bài toán 2. Chứng minh (hoặc tìm điều kiện của tham số) mặt phẳng (P) thuộc một chùm mặt phẳng (P_m) cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Giả sử:

(P): Ax+By+Cz+D=0 và (P_m): A(m)x+B(m)y+C(m)z+D(m)=0.

1. Với bài toán chứng minh (P)⊂(P_m), xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} A(m) = A \\ B(m) = B \\ C(m) = C \\ D(m) = D \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A(m) = -A \\ B(m) = -B \\ C(m) = -C \\ D(m) = -D \end{cases}$$

⇒ nghiệm m_0.

Vậy, (P) thuộc một chùm mặt phẳng (P_m) ứng với m=m_0.

2. Với bài toán tìm điều kiện của tham số để $(P) \subset (P_m)$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định phương trình của trục (d).

Lấy hai điểm phân biệt $A, B \in (d)$.

Bước 2: Để $(P) \subset (P_m) \Leftrightarrow A, B \in (P) \Rightarrow$ giá trị của tham số.

Ví dụ 10: Cho chùm mặt phẳng (P_m): $(m+2)x+(m+1)y+(m-1)z-3m-1=0$.

a. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) : $y+3z-5=0$ thuộc chùm (P_m).

b. Xác định α, β để mặt phẳng (Q) : $\alpha x+\beta y-(\alpha+1)z+2=0$ thuộc chùm (P_m).

Giải.

a. Xét hệ phương trình:

- $\begin{cases} m+2=0 \\ m+1=1 \\ m-1=3 \\ -3m-1=2 \end{cases} \Rightarrow$ vô nghiệm.

- $\begin{cases} m+2=0 \\ m+1=-1 \\ m-1=-3 \\ -3m-1=-2 \end{cases} \Rightarrow$ nghiệm $m=-2$.

Vậy, (P) thuộc một chùm mặt phẳng (P_m) ứng với $m=-2$

b. Viết lại phương trình chùm (P_m) dưới dạng:

$2x+y-z-3+m(x+y+z-1=0$.

Vậy, chùm mặt phẳng (P_m) được tạo bởi trục (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} 2x+y-z-3=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}.$$

Lấy hai điểm phân biệt $A(0, 2, -1)$, $B(2, -1, 0) \in (d)$.

Để $(Q) \subset (P_m) \Leftrightarrow A, B \in (Q)$, ta được:

$$\begin{cases} \alpha.0+\beta.2-(\alpha+1).(-1)=0 \\ \alpha.2+\beta.(-1)-(\alpha+1).0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=0 \end{cases}.$$

Vậy với $\alpha=-1$ và $\beta=0$ ta được $(Q) \subset (P_m)$.

II. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (ĐHKT-97): Cho điểm $A(1, 2, 1)$ và đường thẳng (d) : $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = z+3$.

a. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và chứa đường thẳng (d).

b. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng (d).

BÀI GIẢI

a. Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có $\vec{a}(3, 4, 1)$. Lấy điểm $B(0, 1, -3) \in (d)$.

Cách 1: Theo giả thiết, ta có

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d) \subset (P) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A(1,2,1) \\ \text{hai vtcp } \vec{a}(3,4,1) \\ \overrightarrow{BA}(1,1,4) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} x=1+3t_1+t_2 \\ y=2+4t_1+t_2 \\ z=1+t_1+4t_2 \end{cases}, t_1, t_2 \in R.$$

Cách 2: Sử dụng tích hỗn tạp:

$M(x, y, x) \in (P) \Leftrightarrow D(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BA}, \vec{a})=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}(x-1) + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.(y-2) + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.(z-1) = 0$

$\Leftrightarrow$ -15x+11y+z-5=0.

Cách 3: Chuyển phương trình (d) về dạng tổng quát

Từ phương trình (d) suy ra:

$\begin{cases} 4x - 3y + 3 = 0 \\ x - 3z - 9 = 0 \end{cases}$.

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa (d) $\Rightarrow$ (P) thuộc chùm tạo bởi (d) có dạng:

(P): 4x-3y+3+m(x-3z-9)=0 $\Leftrightarrow$ (P): (4+m)x-3y-3mz+3-9m=0 (1)

Điểm $A \in (P) \Leftrightarrow$ (4+m)-3.2-3m+3-9m=0 $\Leftrightarrow$ $m=\frac{1}{11}$.

Thay $m=\frac{1}{11}$ vào (1) ta được (P): 15x-11y-z+8=0.

b. Khoảng cách từ A đến (d) được cho bởi:

$$d(A, (d)) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 2-1 & 1+3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1+3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 2-1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{3^2+4^2+1^2}} = \sqrt{\frac{347}{26}}.$$

Bài 2 (ĐHCS-97): Cho điểm M(1, 0, 5) và hai mặt phẳng (P): 2x-y+3z+1=0; (Q): x+y-z+5=0.

a. Tính khoảng cách từ M đến (P).

b. Viết phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến (d) của (P) và (Q) đồng thời vuông góc với mặt phẳng 3x-y+1=0.

BÀI GIẢI

a. Khoảng cách từ M đến (P) được cho bởi:

$$d(M, (P)) = \frac{|2.1 - 1.0 + 3.5 + 1|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}} = \frac{18}{\sqrt{14}}.$$

b. Phương trình giao tuyến (d) của (P) và (Q), có dạng:

$\begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$.

Gọi (R) là mặt phẳng cần tìm. Ta có:

- (R) chứa (d) $\Rightarrow$ (R) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi (d), có dạng:

  (R): 2x-y+3z+1+m(x+y-z+5)=0 $\Leftrightarrow$ (2+m)x-(1-m)y+(3-m)z+1+5m=0 (1)
- Khi đó (R) có vtpt $\vec{n}$ (2+m, -1+m, 3-m).
- Vì (R) vuông góc mặt phẳng 3x-y+1=0

  $\Leftrightarrow$ (2+m).3 +(-1+m).(-1)+(3-m).0 =0 $\Leftrightarrow$ $m=-\frac{7}{2}$.

Thay $m=-\frac{7}{2}$ vào (1), ta được (R): 3x+9y-13z+33=0.

Bài 3 (ĐHNN I-96): Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình là:

$$(d_1): \begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + z + 1 = 0 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = 2 + at \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}, (t \in R).$$

a. Với a cho trước, xác định phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và song song với (d_2).

b. Với a cho trước, xác định phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và vuông góc với (d_2).

BÀI GIẢI

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d_2), khi đó $\vec{a}$ (a, 2, -3).

(P) chứa (d_1) ⇒ (P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi (d_1), có dạng:

(P): $x+2y-3z+1+m(2x-3y+z+1)=0$

⇔ (P): $(1+2m)x+(2-3m)y+(m-3)z+1+m=0$ (1)

Khi đó (P) có vtpt $\vec{n}_1(1+2m, 2-3m, m-3)$.

a. Vì $(P)//(d_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{a}$

$\Leftrightarrow a(1+2m)+2(2-3m)-3(m-3)=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{13+a}{9-2a}$.

Thay $m=\dfrac{13+a}{9-2a}$ vào (1), ta được (P): $35x-(11+7a)y+7(a-2)z+22-a=0$.

b. Vì $(P)\perp(d_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{a}$ cộng tuyến

$\Leftrightarrow \dfrac{1+2m}{a} = \dfrac{2-3m}{2} = \dfrac{m-3}{-3} \Rightarrow m=0$.

Thay m=0 vào (1), ta được (P): $x+2y-3z+1=0$.

Bài 4 (ĐHTL-94): Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và vuông góc với mặt phẳng (Q) biết

$$(d): \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases} \text{ và } (Q): x-2y+z-5=0.$$

BÀI GIẢI

Gọi (P) là mặt phẳng cần xác định, ta có:

$$\begin{cases} (d) \subset (P) \\ (P) \perp (Q) \end{cases}.$$

(P) chứa (d) ⇒ (P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) có dạng:

$3x-2y+z-3+m(x-2y)=0 \Leftrightarrow (3+m)x-(2+2m)y+z-3=0$ (1)

Khi đó (P) có vtpt $\vec{n}(3+m, -2-2m, 1)$.

Gọi $\vec{n}_1$ là một vtpt của (Q), khi đó $\vec{n}_1(1, -2, 1)$.

Mặt phẳng $(P)\perp(Q) \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n}_1=0$

$\Leftrightarrow (3+m).1+(-2-2m)(-2)+1.1=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{8}{5}$.

Thay $m=-\dfrac{8}{5}$ vào (1) được (P): $7x+6y+5z-15=0$.

Bài 5 (ĐHBK-95): Cho họ mặt phẳng (P_m): $2x+y+z-1+m(x+y+z+1)=0$, m là tham số.
a. CMR với mọi m, mặt phẳng (P_m) luôn đi qua một đường thẳng (d) cố định.
b. Tìm mặt phẳng (P_m) vuông góc với mặt phẳng (P_0). Tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng (d).

BÀI GIẢI

a. Gọi (d) là đường thẳng có phương trình:

$$(d): \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Dễ thấy, mặt phẳng (P_m) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi trục (d).
Vậy (P_m) luôn đi qua một đường thẳng (d) cố định.

b. Mặt phẳng (P_0): $2x+y+z-1=0$ có một vtpt $\vec{n}_0\,(2, 1, 1)$.

Chuyển phương trình (P_m) về dạng:

(P_m): $(2+m)x+(1+m)y+(1+m)z-1+m=0$ (1)

Khi đó (P_m) có một vtpt $\vec{n}_m\,(2+m, 1+m, 1+m)$.

Vì $(P_m)\perp(P_0) \Leftrightarrow \vec{n}_m.\vec{n}_0=0 \Leftrightarrow 2(2+m)+1+m+1+m=0 \Leftrightarrow m=-\frac{3}{2}$.

Thay $m=-\frac{3}{2}$ vào (1), ta được $(P_{-3/2})$: $x-y-z-5=0$.

- *Tính khoảng cách* từ gốc toạ độ đến đường thẳng (d).

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có:

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = \vec{a}\,(0, -1, 1).$$

Lấy một điểm $A(2, 0, -3)\in(d)$. Khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng (d) được cho bởi:

$$kc(A, (d)) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

Bài 6 (ĐHTCKT - 95): Xác định giá trị của các tham số n, m để mặt phẳng (P): $5x+ny+4z+m=0$ thuộc chùm mặt phẳng $(Q_{\alpha,\beta})$: $\alpha(3x-7y+z-3)+\beta(x-9y-2z+5)=0$.

BÀI GIẢI

Chùm mặt phẳng $(Q_{\alpha,\beta})$ được tạo bởi trục (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} 3x - 7y + z - 3 = 0 \\ x - 9y - 2z + 5 = 0 \end{cases}.$$

Lấy hai điểm phân biệt $A(\frac{31}{10}, \frac{9}{10}, 0)$, $B(\frac{1}{7}, 0, \frac{18}{7})\in(d)$.

Để $(P)\subset(Q_{\alpha,\beta}) \Leftrightarrow A, B\in(P)$, ta được:

$$\begin{cases} 5.\frac{31}{10} + n.\frac{9}{10} + 4.0 + m = 0 \\ 5.\frac{1}{7} + n.0 + 4.\frac{18}{7} + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -11 \\ n = -5 \end{cases}.$$

Vậy với $m=-11$ và $n=-5$ ta được $(P)\subset(Q_{\alpha,\beta})$.

Bài 7 (Đề thi Đại học Khối A - 2002): Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng:

$(\Delta_1): \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$, $(\Delta_2): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

a. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa (Δ_1) và song song với (Δ_2).

b. Cho điểm M(2,1,4). Tìm tọa độ điểm H thuộc (Δ_2) sao cho độ dài MH ngắn nhất

BÀI GIẢI

a. Ta có:

- (P) chứa (Δ_1) $\Leftrightarrow$ (P) thuộc chùm tạo bởi (Δ_1), có dạng:
  (P): x-2y+z-4+m(x+2y-2z+4)=0
  $\Leftrightarrow$ (P): (m+1)x+2(m-1)y+(1-2m)z-4+4m=0
  $\Rightarrow$ vtpt $\overrightarrow{n_P}$ (m+1, 2m-2, 1-2m).

  Gọi $\overrightarrow{a_2}$ là vtcp của (Δ_2), ta được: $\overrightarrow{a_2}$ (1, 1, 2).

- $(P)//(\Delta_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{a_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{a_2} = 0$
  $\Leftrightarrow$ 1.(m+1)+1.2(m-1)+2.(1-2m)=0 $\Leftrightarrow$ m=1.

  Vậy phương trình của (P) có dạng: 2x-z=0.

b. $H \in (\Delta_2)$: MH_{Min}
  $\Leftrightarrow$ H là hình chiếu vuông góc của M lên (Δ_2)
  $\Leftrightarrow$ $H = (Q) \cap (\Delta_2)$

trong đó:

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } M \\ (Q) \perp (\Delta_2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } M(2,1,4) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{a_2}(1,1,2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (Q): x=y+2z-11=0.

Bằng cách thay phương trình tham số của (Δ_2) vào phương trình của (Q), ta được: t=1 $\Rightarrow$ H(2, 3, 3).

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Lập phương trình mặt phẳng đi qua M(2, 1, 3) và chứa (d) biết:

a. $(d): \begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

b. $(d): \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

Bài tập 2. Lập phương trình mặt phẳng đi qua điểm M(2, 1, -1) và qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có phương trình:

(P_1): x-y+z-4=0 và (P_2): 3x-y+z-1=0.

Bài tập 3. Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng

$(d): \begin{cases} 3x - 2y + z - 3 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$

và song song với mặt phẳng (Q) có phương trình: 11x-2y-15z-6=0.

Bài tập 4. Lập phương trình mặt phẳng qua giao tuyến của (P_1): y+2z-4=0 và (P_2):x+y-z-3=0 và song song với mặt phẳng (Q): x+y+z-2=0.

Bài tập 5. Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng

$$(d): \begin{cases} 3x - 2y + z - 3 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

và vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình:

a. (ĐHNN I - 95) : (Q) : x-2y+z+5=0.

b. $(Q): \begin{cases} x = 4 + 3t_1 + t_2 \\ y = 4 + t_1 - 2t_2 \\ z = -5 - t_1 + t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in R)$

Bài tập 6. Lập phương trình của mặt phẳng qua giao tuyến của 2 mặt phẳng (P_1): 3x-y+z-2=0 và (P_2): x+4y-5=0 và vuông góc với mặt phẳng 2x-z+7-0.

Bài tập 7. Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng

$$(d): \begin{cases} 3x - 2y + z - 3 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

và song song với đường thẳng (Δ) có phương trình:

a. $(\Delta): \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$. b. $(\Delta): \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z+5}{5}$.

Bài tập 8. Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng

$$(d): \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

và vuông góc với đường thẳng (Δ) có phương trình:

a. $(\Delta): \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$. b. $(\Delta): \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z+5}{5}$.

Bài tập 9. Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tạo với mặt phẳng (Q) một góc bằng 60^0 biết:

$$(d): \begin{cases} 3x - 2y + z - 3 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \text{ và } (Q): 3x+4y-6=0$$

Bài tập 10. Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng

$$(d): \begin{cases} x - 3z - 2 = 0 \\ y + 5z - 1 = 0 \end{cases}$$

và có khoảng cách đến điểm A(1, -1, 0) bằng 1.

Bài tập 11. Cho đường thẳng (d) và hai mặt phẳng (P_1), (P_2) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}; (P_1): 5x+5y-3z-2=0; (P_2): 2x-y+z-6=0.$$

Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d) và sao cho $(P)\cap(P_1)$ và $(P)\cap(P_2)$ là hai đường thẳng trực giao.

Bài tập 12. (ĐHKT - 93): Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x - 8z + 23 = 0 \\ y - 4z + 1 = 0 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}.$$

a. Viết phương trình các mặt phẳng (P_1), (P_2) song song với nhau và lần lượt chứa (d_1), (d_2).

b. Tính khoảng cách giữa (d_1), (d_2).

c. Lập phương trình đường thẳng (d) song song với trục Oz và cắt cả hai đường thẳng (d_1), (d_2).

CHỦ ĐỀ 5
KHOẢNG CÁCH
TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. KHOẢNG CÁCH HÌNH HỌC

Bài toán 1. (*Khoảng cách hình học*) Khoảng cách hình học từ một điểm đến một mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho điểm $M(x_M, y_M, z_M)$ và mặt phẳng (P): Ax+By+Cz+D=0. Khoảng hình học từ M đến (P) được tính bởi công thức:

$$d(M, (P))=\frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (1)$$

Vậy, để xác định khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng (P) cho trước, ta chia làm hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu (P) cho dưới dạng tổng quát, ta áp dụng công thức (1).

Trường hợp 2: Nếu (P) cho dưới dạng tham số, ta đi thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình (P) về dạng tổng quát.

Bước 2: Áp dụng công thức (1).

Ví dụ 1: Tính khoảng cách từ điểm M(1, 2, 3) đến mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

a. (P): x+y+z+3=0.

b. $(P): \begin{cases} x = 1 - t_1 + t_2 & (1) \\ y = 2t_1 & (2) \\ z = 2t_2 & (3) \end{cases}, (t_1, t_2 \in R).$

Giải.

a. Khoảng từ M đến (P) được tính bởi:

$$d=d(M, (P))=\frac{|1+2+3+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=3\sqrt{3}.$$

b. Chuyển phương trình của (P) về dạng tổng quát.

Từ phương trình tham số của (P) thay (2),(3) vào (1), ta được

$$x=1-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z \Leftrightarrow 2x+y-z-2=0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của (ABC).

- Khoảng từ M đến (P) được tính bởi:

$$d=d(M, (P))=\frac{|2.1+2-3-2|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

2. KHOẢNG CÁCH ĐẠI SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Cho điểm $M(x_M, y_M, z_M)$ và mặt phẳng (P): Ax+By+Cz+D=0. Khoảng đại số từ M đến (P) được tính bởi công thức:

$$t = \frac{Ax_0 + By_0 + Cy_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

- Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (P), ta có nhận xét sau:
  - Nếu $t>0 \Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cy_0+D>0 \Rightarrow$ vectơ $\vec{n}$ và điểm M cùng phía với mặt phẳng (P).
  - Nếu $t<0 \Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cy_0+D<0 \Rightarrow$ vectơ $\vec{n}$ và điểm M khác phía với mặt phẳng (P).
- Cho hai điểm $M_1(x_1, y_1)$ và $M_2(x_2, y_2)$, ta có nhận xét sau:
  - Nếu $(Ax_1+By_1+C)(Ax_2+By_2+C)>0 \Rightarrow M_1$ và M_2 cùng phía với (P).
  - Nếu $(Ax_1+By_1+C)(Ax_2+By_2+C)<0 \Rightarrow M_1$ và M_2 khác phía với (P).

Nhận xét trên cho phép ta giải được một lớp bài toán sau:

Bài toán 2: Cho mặt phẳng (P): Ax+By+Cz+D=0 và điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)\notin(P)$. Viết phương trình mặt phẳng cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng h và thoả mãn:

a. Thuộc phần nửa không gian giới hạn bởi (P) không chứa M_0.

b. Thuộc phần nửa không gian giới hạn bởi (P) chứa M_0.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

a. Gọi (P_1) là mặt phẳng thoả mãn điều kiện đầu bài.

Khi đó, điểm $M(x, y, z)\in(P_1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \ \&\ M_0 \text{ khacphiavoi } (P) \\ d(M,(P)) = h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (Ax + By + Cz + D)(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) < 0 \\ \dfrac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = h \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Từ hệ (I) ta có được phương trình mặt phẳng (P_1).

b. Gọi (P_2) là mặt phẳng thoả mãn điều kiện đầu bài.

Khi đó, điểm $M(x, y, z)\in(P_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \ \&\ M_0 \text{ cungphiavoi } (P) \\ d(M,(P)) = h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (Ax + By + Cz + D)(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) > 0 \\ \dfrac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = h \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Từ hệ (II) ta có được phương trình mặt phẳng (P_2).

Ví dụ 2 : Cho mặt phẳng (P): $3x+4y+z+1=0$ và điểm $M_0(1, 2, 0)$. Viết phương trình mặt phẳng cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 4 và thoả mãn:

a. Thuộc phần nửa mặt phẳng giới hạn bởi (P) không chứa M_0.

b. Thuộc phần nửa mặt phẳng giới hạn bởi (P) chứa M_0.

Giải.

a. Gọi (P_1) là mặt phẳng thoả mãn điều kiện đầu bài.

Khi đó, điểm $M(x, y, z) \in (P_1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \ \& \ M_0 \text{ khac phia voi } (P) \\ d(M,(P)) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+4y+z+1)(3.1+4.2+1) < 0 \\ \dfrac{|3x+4y+z+1|}{\sqrt{3^2+4^2+1^2}} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y+z+1 < 0 \\ |3x+4y+z+1| = 4\sqrt{26} \end{cases} \Leftrightarrow 3x+4y+z+1+4\sqrt{26}=0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của mặt phẳng (d_1).

b. Tương tự, ta có: (P_2): $3x+4y+z+1-4\sqrt{26}=0$.

> **Bài toán 3** : Cho hai mặt phẳng (P_1): $A_1x+B_1y+C_1=0$, (P_2): $A_2x+B_2y+C_2=0$ cắt nhau và điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ không thuộc (P_1) và (P_2). Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi (P_1), (P_2) chứa điểm M_0 hoặc của góc đối đỉnh với nó.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn điều kiện đầu bài. Khi đó, $M(x, y, z) \in (P)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \ \& \ M_0 \text{ cung phia voi } (P_1) \\ M \ \& \ M_0 \text{ cung phia voi } (P_2) \\ d(M,(P_1)) = d(M,(P_2)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A_1x+B_1y+C_1z+D_1)(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1) > 0 \\ (A_2x+B_2y+C_2z+D_2)(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2) > 0 \\ \dfrac{|A_1x+B_1y+C_1z+D_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \dfrac{|A_2x+B_2y+C_2z+D_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \end{cases}$$

Từ hệ trên ta có được phương trình mặt phẳng (P).

Ví dụ 3: Cho hai mặt phẳng (P_1): $2x+3y+z+1=0$, (P_2): $3x+2y-z-3=0$ và điểm $M_0(0, 1, 0)$. Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi (P_1), (P_2) chứa điểm M_0 hoặc của góc đối đỉnh với nó.

Giải.

Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn điều kiện đầu bài.

Khi đó, điểm $M(x, y, z) \in (P)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \ \& \ M_0 \text{ cung phia voi } (P_1) \\ M \ \& \ M_0 \text{ cung phia voi } (P_2) \\ d(M,(P_1)) = d(M,(P_2)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3y+z+1)(2.0+3.1+0+1) > 0 \\ (3x+2y-z-3)(3.0+2.1-.0-3) > 0 \\ \dfrac{|2x+3y+z+1|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \dfrac{|3x+2y-z-3|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y+z+1 > 0 \\ 3x+2y-z-3 < 0 \\ 2x+3y+z+1 = -(3x+2y-z-3) \end{cases} \Leftrightarrow 5x+5y-2=0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của mặt phẳng (P).

Bài toán 4: Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc nhị diện (A, BC, D).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Gọi (P) là mặt phẳng phân giác của góc nhị diện (A, BC, D).

Khi đó, điểm $M(x, y, z) \in (P)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \ \& \ A \text{ cung phia voi } (BCD) \\ M \ \& \ D \text{ cung phia voi } (ABC) \\ d(M,(ABC)) = d(M,(BCD)) \end{cases} \qquad (I)$$

Từ hệ (I) ta có được phương trình mặt phẳng (P).

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng toạ độ Oxyz cho tứ diện ABCD biết A(3, 1, 0); B(1, 0, -1); C(3, -2, 0); D(0, 2, -2). Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc nhị diện (A, BC, D).

Giải:

- Phương trình mặt phẳng (ABC) được xác định bởi:

$$(ABC): \begin{cases} \text{qua } A(3,1,0) \\ \text{cap vtcp } \overrightarrow{AB} \ \& \ \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow (ABC): \begin{cases} \text{qua } A(3,1,0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1}(1,0,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (ABC): x-2z-3=0.$$

- Phương trình mặt phẳng (BCD) được xác định bởi:

$$(BCD): \begin{cases} \text{qua } B(1,0,-1) \\ \text{cap vtcp } \overrightarrow{BC} \ \& \ \overrightarrow{BD} \end{cases} \Leftrightarrow (BCD): \begin{cases} \text{qua } B(1,0,-1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2}(0,1,2) \end{cases} \Leftrightarrow (BCD): y+2z+2=0.$$

- Gọi (P) là mặt phẳng phân giác của góc nhị diện (A, BC, D). Khi đó, điểm $M(x, y) \in (P)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \ \& \ A \text{ cung phia voi } (BCD) \\ M \ \& \ D \text{ cung phia voi } (ABC) \\ d(M,(ABC)) = d(M,(BCD)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y + 2z + 2)(1 + 2) > 0 \\ (x - 2z - 3)(4 - 3) > 0 \\ \dfrac{|x - 2z - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{|y + 2z + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z + 2 > 0 \\ x - 2z - 3 > 0 \\ y + 2z + 2 = x - 2z - 3 \end{cases} \Leftrightarrow x-y-4z-5=0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của mặt phẳng (P).

II. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (ĐHD-99): Cho hình tứ diện ABCD biết toạ độ các đỉnh A(2, 3, 1); B(4, 1, -2); C(6, 3, 7); D(-5, -4, 8). Tính độ dài đường cao hình tứ diện xuất phát từ D.

BÀI GIẢI

- Phương trình tổng quát của (ABC) cho bởi:

$$(ABC): \begin{cases} \text{qua } A(2,3,1) \\ \text{hai vtcp } \overrightarrow{AB}(2,-2,-3) \ \& \ \overrightarrow{AC}(4,0,6) \end{cases} \Leftrightarrow (ABC): \begin{cases} \text{qua } A(2,3,1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(-12,-24,8) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (ABC): -3(x-2)-6(y-3)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow (ABC): 3x+6y-2z-22=0.$$

- Độ dài đường cao hình tứ diện xuất phát từ D chính là kc(D, (ABC)), ta có:

$$d=d(D, (ABC))=\frac{|3.(-5) + 6.(-4) - 2.8 - 22|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{77}{7} = 11.$$

Bài 2 (ĐHQG/B-98): Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn Oxyz. Xét tam giác đều OAB trong mặt phẳng (xOy) có cạnh bằng a, mặt phẳng AB song song với trục Oy, điểm A thuộc góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng (xOy). Xét điểm $S(0, 0, \frac{a}{3})$.

a. Hãy xác định toạ độ của các điểm A, B và trung điểm E của đoạn OA, sau đó viết phương trình của mặt phẳng (P) chứa SE và song song với Ox.

b. Tính khoảng cách từ O đến (P), từ đó suy ra khoảng cách giữa Ox và SE.

BÀI GIẢI

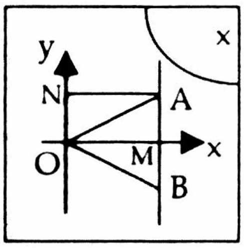
a. Xác định toạ độ điểm A, B:

- Từ giả thiết: ΔOAB đều, AB//Oy, điểm A thuộc góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng (xOy). Suy ra:

$$x_A = x_B = OM = OA.\cos AOM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$y_B = y_A = ON = OA.\sin AOM = a/2.$$

$$z_A = z_B = 0.$$



Vậy, $A(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, 0)$ và $B(\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}, 0)$.

- Điểm E là trung điểm OA, vậy: $E(\frac{a\sqrt{3}}{4}, \frac{a}{4}, 0)$.

- Mặt phẳng (P) chứa SE và song song với Ox, ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } S(0,0,\frac{a}{3}) \\ \text{hai vtcp } \overrightarrow{SE}(\frac{a\sqrt{3}}{4}, \frac{a}{4}, -\frac{a}{3}) \ \& \ \overrightarrow{Ox}(1,0,0) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } S(0,0,\frac{a}{3}) \\ \text{vtpt } \vec{n}(0, -\frac{a}{3}, -\frac{a}{4}) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $4y+3z-a=0$.

b. Khoảng cách từ O đến (P) được xác định bởi:

$$d = d(O, (P)) = \frac{|-a|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{a}{5}.$$

Từ đó suy ra khoảng cách giữa hai mặt phẳng Ox và SE bằng $\frac{a}{5}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính khoảng cách từ điểm M(2, 2, 1) đến mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

a. (P): $2x+y-3z+3=0$.

b. $(P): \begin{cases} x = 4 + 3t_1 + t_2 \\ y = 4 + t_1 - 2t_2 \\ z = -5 - t_1 + t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in R)$.

Bài tập 2. Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn Oxyz, cho tứ diện có bốn đỉnh A(5,1,3); B(1,6,2); C(5,0,4) và D(4,0,6).

a. Lập phương trình tổng quát mặt phẳng (ABC).

b. Tính chiều dài đường cao hạ từ đỉnh D của tứ diện, từ đó suy ra thể tích của tứ diện.

c. Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc nhị diện (A, BC, D).

Bài tập 3. Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn Oxyz, cho tứ diện có bốn đỉnh A(1, 1, 1); B(-2, 0, 2); C(0, 1, -3) và D(4, -1, 0).

a. (ĐHL/D-96): Tính chiều dài đường cao hạ từ đỉnh D của tứ diện đó.

b. Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc nhị diện (A, BC, D).

PHẦN II
ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

CHỦ ĐỀ 1
PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa: Vectơ $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{a} // (d) \end{cases}.$$

Nhận xét: $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d) thì mọi vectơ $k\vec{a}$ với **$k \neq 0$ đều** là vtcp của đường thẳng đó.

2. PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐƯỜNG THẲNG

2.1. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Vì đường thẳng (d) trong không gian có thể xem là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) nào đó, nên phương trình tổng quát của (d) có dạng:

$$(d): \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$ với điều kiện $A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$.

trong đó (1), (2) theo thứ tự là phương trình của mặt phẳng (P), (Q).

2.2. Phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng

Bài toán 1: Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$, nhận $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3) làm vtcp.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Đường thẳng (d) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$, nhận $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3) làm vtcp.

a. *Phương trình vectơ của đường thẳng:*

$$M \in (d) \Leftrightarrow \exists t \in R: \ \overrightarrow{M_0M} = t\vec{a} \qquad (1)$$

b. *Phương trình tham số của đường thẳng*

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M_0(x_0, y_0, z_0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(a_1, a_2, a_3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}, (t \in R). \qquad (2)$$

Ngược lại: nếu (d) có phương trình (2), ta có nhận xét:

- Đường thẳng (d) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3).

c. *Phương trình chính tắc của đường thẳng*

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M_0(x_0, y_0, z_0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(a_1, a_2, a_3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \quad (3)$$

Ngược lại: nếu (d) có phương trình (3), ta có nhận xét:

- Đường thẳng (d) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3).

Ví dụ 1. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M_0(1, 1, 1)$, nhận $\vec{a}$ (1, 2, 3) làm vtcp.

Giải.

Ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M_0(1,1,1) \\ \text{vtcp } \vec{a}(1,2,3) \end{cases}$$

Phương trình vectơ: Điểm $M \in (d) \Leftrightarrow \exists t \in R$: $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$

Phương trình tham số có dạng

$$(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t, \ (t \in R). \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Phương trình chính tắc có dạng

$$(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (ĐHTS/B Phân ban-98): Viết phương trình chính tắc của đường thẳng qua điểm M(1, 1, 2) và song song với đường thẳng (d) biết

$$(d): \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}.$$

BÀI GIẢI

Nhận xét rằng điểm $M \notin (d)$.

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), được:

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = \vec{a}\,(-4, 8, 10) \text{ chọn } \vec{a}\,(-2, 4, 5).$$

Gọi (Δ) là đường thẳng qua điểm M và song song với đường thẳng (d). Ta có:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } M \\ \text{vtcp } \vec{a} \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{5}.$$

Bài 2 (ĐH Huế-99): Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A(1, 3, 2), B(1, 2, 1) và C(1, 1, 3). Viết phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua trọng tâm của ΔABC và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đó.

BÀI GIẢI

Gọi $G(x_G, y_G, z_G)$ là trọng tâm ΔABC, khi đó:

$$G: \begin{cases} 3x_G = x_A + x_B + x_C \\ 3y_G = y_A + y_B + y_C \\ 3z_G = z_A + z_B + z_C \end{cases} \Leftrightarrow G: \begin{cases} x_G = 1 \\ y_G = 2 \\ z_G = 2 \end{cases} \Leftrightarrow G(1, 2, 2).$$

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của đường thẳng (d), khi đó:

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \overline{AB} \\ \vec{a} \perp \overline{AC} \end{cases}, \text{ trong đó } \begin{cases} \overline{AB}(0,-1,-1) \\ \overline{AC}(0,-2,1) \end{cases}.$$

Vậy:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}\ (-3, 0, 0), \text{ chọn } \vec{a}\ (-1, 0, 0).$$

Đường thẳng (d) đi qua trọng tâm G của ΔABC và vuông góc với mặt phẳng chứa ΔABC, được xác định bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } G(1,2,2) \\ \text{vtcp } \vec{a}(-1,0,0) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \quad t \in R.$$

Đó chính là phương trình tham số của (d).

Bài 3 (ĐHTCKT-99): Viết phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) đi qua điểm A(1, 1, -2) song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (d), biết

$$(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3};\ (P): x - y - z - 1 = 0.$$

BÀI GIẢI

Gọi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ theo thứ tự là vtcp của (d), vtcp của (Δ) và vtpt của (P), ta có:

$\vec{a}$ (2, 1, 3),

$\vec{n}$ (1, -1, -1).

Theo giả thiết;

$$(\Delta): \begin{cases} (\Delta)//(P) \\ (\Delta)\perp(d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{b} \perp \vec{n} \\ \vec{b} \perp \vec{a} \end{cases} \Rightarrow \vec{b}\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = \vec{b}\ (2, 5, -3).$$

Vậy, phương trình (Δ), được xác định bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } A(1,1,-2) \\ \text{vtcp } \vec{b}(2,5,-3) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}.$$

Chú ý. Nếu bài toán yêu cầu viết phương trình tổng quát của (Δ), ta có thể lựa chọn cách sau:

Phân tích. Theo giả thiết:

$$(\Delta): \begin{cases} A \in (\Delta) \\ (\Delta)//(P) \\ (\Delta)\perp(d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\Delta) \subset (Q): \begin{cases} A \in (Q) \\ (Q)//(P) \end{cases} \\ (\Delta) \subset (R): \begin{cases} A \in (R) \\ (R)\perp(d) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow (P)\cap(Q)=(\Delta).$$

Gọi $\vec{a}$, $\vec{n}$ theo thứ tự là vtcp, vtpt của (d), (P), ta có: $\vec{a}(2, 1, 3)$, $\vec{n}(1, -1, -1)$.

Phương trình mặt phẳng (Q), được xác định bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } A(1,1,-2) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1,-1,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x-1-(y-1)-(z+2)=0 \Leftrightarrow (Q): x-y-z-2=0.$$

Phương trình mặt phẳng (R), được xác định bởi:

$$(R): \begin{cases} \text{qua } A(1,1,-2) \\ \text{vtpt } \vec{a}(2,1,3) \end{cases} \Leftrightarrow (R): 2(x-1)+(y-1)+3(z+2)=0 \Leftrightarrow (R): 2x+y+3z+3=0.$$

Phương trình đường thẳng (Δ) là giao tuyến của (Q) và (R), có dạng:

$$\begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ 2x + y + 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

Đó chính là phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ).

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Lập phương trình đường thẳng (d) trong các trường hợp sau:

a. (d) đi qua điểm $M_0(1, 0, 1)$, nhận $\vec{a}(3, 2, 3)$ làm vtcp.

b. (d) đi qua hai điểm A(1, 0, -1) và B(2, -1, 3).

Bài tập 2. Trong không gian Oxyz lập phương trình tổng quát của các giao tuyến của mặt phẳng (P): x-3y+2z-6=0 với các mặt phẳng toạ độ.

Bài tập 3. (Đề 54-Va): Viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm M(2, 3, -5) và song song với đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}.$$

Bài tập 4. Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình là:

$$(d): \begin{cases} 3x - y + 4z + 1 = 0 \\ 2x + 3y + z + 7 = 0 \end{cases}; (P): x+y+z+1=0.$$

Tìm phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) đi qua điểm A(1, 1, 1) song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (d).

Bài tập 5. Cho mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A(3, 0, 0), B(0, 6, 0) và C(0, 0, 9). Viết phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua trọng tâm của ΔABC và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đó.

CHỦ ĐỀ 2
CHUYỂN DẠNG
PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Tìm một vtcp của đường thẳng (d) cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

a. *Nếu đường thẳng cho dưới dạng tham số:*

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}, (t \in R),$$

thì một vtcp là: $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3).

b. *Nếu đường thẳng cho dưới dạng chính tắc::*

$$(d): \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3},$$

thì một vtcp là: $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3).

c. *Nếu đường thẳng cho dưới dạng tổng quát:*

$$(d): \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$ với điều kiện $A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$.

thì một vtcp $\vec{a}$ của đường thẳng đó được xác định bởi:

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

d. *Nếu biết toạ độ hai điểm khác nhau* A, B$\in$(d) thì một vtcp của đường thẳng là $\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 1: Tìm vtcp của các đường thẳng sau:

a. $(d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = t - 3 \end{cases}, (t \in R).$

b. $(d): \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{5}$

c. $(d): \begin{cases} 3x - y + 4z + 1 = 0 \\ 2x + 3y + z + 7 = 0 \end{cases}.$

Giải.

a. Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương là: $\vec{a}$ (1, -2, 1).

b. Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương là: $\vec{a}$ (-2, 3, 5).

c. Gọi $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3) là một vtcp của (d), ta có:

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = \vec{a}\ (-13, 5, 11).$$

Bài toán 2: Chuyển dạng phương trình tổng quát của đường thẳng sang dạng phương trình tham số hoặc chính tắc.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Giả sử đường thẳng (d) có phương trình tổng quát dưới dạng:

$$(d): \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (2) \end{cases} \text{ (điều kiện } A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2\text{)}$$

Để chuyển phương trình của (d) sang dạng tham số, ta lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một vtcp $\vec{a}$ của đường thẳng (d).
Chọn một đểm $A \in (d)$.

Bước 2: Lập phương trình tham số hoặc chính tắc của đường thẳng (d) qua A và có vtcp $\vec{a}$.

Cách 2: Chọn hai điểm khác nhau A, $B \in (d)$, từ hệ phương trình (1), (2), sau đó viết phương trình tham số của hoặc chính tắc của đường thẳng (d) (chính là đường thẳng qua A hoặc B có vtcp là $\overrightarrow{AB}$).

Cách 3 (Chỉ áp dụng cho phương trình tham số): Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt một trong các ẩn x, y, z là t. Chẳng hạn x=t.

Bước 2: Thay x=t vào (1) và (2) rồi giải hệ đó với ẩn là y, z.

Bước 3: Tập hợp các phép biểu diễn của x, y, z theo t đã tìm được chính là phương trình tham số của (d).

Ví dụ 2: Cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Hãy viết phương trình tham số của đường thẳng đó.

Giải.

Cách 1: Đặt x=2t, ta có:

$$\begin{cases} 4t + y - z - 3 = 0 \\ 2t + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3t + 2 \\ z = t - 1 \end{cases}.$$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng (d) có dạng:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t + 2, \ (t \in R). \\ z = t - 1 \end{cases}$$

Cách 2: Chọn hai điểm $A(0, 2, -1) \in (d)$ và $B(2, -1, 0) \in (d)$. Khi đó

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(0,2,-1) \\ \text{qua } B(2,-1,0) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{qua } A(0,2,-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(2,-3,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - 3t, \ (t \in R). \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d).

Ví dụ 3: Cho đường thẳng (d) có phương trình tổng quát:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 4y + z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Hãy viết phương trình chính tắc của đường thẳng đó.

Giải.

Cách 1: Chọn điểm A(1, 0, -1)∈(d).

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có:

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \right) = \vec{a}\,(1, -1, 4).$$

Khi đó phương trình chính tắc của đường thẳng (d) được xác định bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(1,0,-1) \\ \text{vtcp } \vec{a}(1,-1,4) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{4}.$$

Đó chính là phương trình chính tắc của đường thẳng (d).

Cách 2: Chọn hai điểm A(1, 0, -1)∈(d) và B(0, 1, -5)∈(d). Khi đó:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(1,0,-1) \\ \text{qua } B(0,1,-5) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{qua } A(1,0,-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(-1,1,-4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (d): \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}.$$

Đó chính là phương trình chính tắc của đường thẳng (d).

Bài toán 3: Cách chuyển dạng phương trình tham số của đường thẳng sang dạng phương trình tổng quát

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Giả sử đường thẳng (d) có phương trình tham số:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \quad (1) \\ y = y_0 + a_2 t \quad (2) \\ z = z_0 + a_3 t \quad (3) \end{cases}, \ (t \in R).$$

Để chuyển phương trình của (d) sang dạng tổng quát, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Rút t từ phương trình (1).

Bước 2: Thay giá trị của t vào (2), ta được (4).

Bước 3: Thay giá trị của t vào (3), ta được (5).

Bước 4: Hệ tạo bởi (4), (5) là phương trình tổng quát của (d).

Chú ý. Trong trường hợp đường thẳng (d) cho dưới dạng chính tắc, ta tách phương trình đó thành hai phương trình con và hệ tạo bởi hai phương trình đó chính là phương trình tổng quát của đường thẳng (d)

Ví dụ 4: Cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$\begin{cases} x = 2 + t & (1) \\ y = 1 - 2t & (2), (t \in R). \\ z = t - 3 & (3) \end{cases}$$

Hãy lập phương trình tổng quát của đường thẳng đó.

Giải.

Rút t từ phương trình (1), ta được t=x-2.

Thay giá trị của t=x-2 vào (2) và (3), ta được:

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x - z - 5 = 0 \end{cases}.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của đường thẳng (d).

Ví dụ 5: Trong không gian Oxyz lập phương trình tổng quát của các giao tuyến của mặt phẳng (P): 5x-7y+2z-3=0 với các mặt phẳng toạ độ.

Giải.

Các mặt phẳng (xOy), (xOz), (yOz) lần lượt có phương trình z=0, y=0, x=0.

a. Giao tuyến của (P) với (xOy) có phương trình:

$$\begin{cases} 5x - 7y + 2z - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 7y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

b. Giao tuyến của (P) với (xOz) có phương trình:

$$\begin{cases} 5x - 7y + 2z - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2z - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

c. Giao tuyến của (P) với (yOz) có phương trình:

$$\begin{cases} 5x - 7y + 2z - 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7y + 2z - 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 Lập phương trình tham số, chính tắc và tổng quát của đường thẳng (d) đi qua điểm A(2,0,-3) và vuông góc với mặt phẳng (P):2x-3y+5z-4=0.

BÀI GIẢI

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có $\vec{n}(2, -3, 5)$.

Vậy, đường thẳng (d) thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(2,0,-3) \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{qua } A(2,0,-3) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,-3,5) \end{cases}.$$

a. *Phương trình tham số* của đường thẳng (d) là:

$$(d): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \quad , (t \in R). \\ z = -3 + 5t \end{cases}$$

b. *Phương trình chính tắc* của đường thẳng (d) là :

$$(d): \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}.$$

c. *Phương trình tổng quát* của đường thẳng (d) là:

$$(d): \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ 5y + 3z + 9 = 0 \end{cases}.$$

Bài 2 Trong không gian Oxyz lập phương trình tham số, chính tắc và tổng quát của đường thẳng (d) đi qua điểm A(2,0,-3) và song song với đường thẳng (Δ) có phương trình:

$$(\Delta): \begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

BÀI GIẢI

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của đường thẳng (Δ), ta có:

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = \vec{a}\,(2, -3, 1).$$

Vậy, đường thẳng (d) thoả mãn:

$$\begin{cases} \text{qua } A(2,0,-3) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,-3,1) \end{cases}.$$

a. *Phương trình tham số* của đường thẳng (d) là:

$$(d): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + t \end{cases}, (t \in R).$$

b. *Phương trình chính tắc* của đường thẳng (d) là:

$$(d): \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{1}.$$

c. *Phương trình tổng quát* của đường thẳng (d) là:

$$(d): \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ y + 3z + 9 = 0 \end{cases}.$$

Bài 3 Lập phương trình tham số, chính tắc và tổng quát của đường thẳng (d) đi qua điểm A(2,0,-3) và vuông góc với hai đường thẳng:

$$(d_1): \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 4y + z + 1 = 0 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} 3x - y + 4z + 1 = 0 \\ 2x + 3y + z + 7 = 0 \end{cases}.$$

BÀI GIẢI

Gọi $\vec{a}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của các đường thẳng (d), (d_1), (d_2), ta có:

$$\vec{a}_1 = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \right) = \vec{a}_1\,(1,-1,4);$$

$$\vec{a}_2 = \left(\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = \vec{a}_2\,(-13,5,11)$$

Khi đó:

$$\begin{cases} (d) \perp (d_1) \\ (d) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 11 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 11 & -13 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -13 & 5 \end{vmatrix} \right) = \vec{a}\,(-31, -63, -8).$$

Vậy, đường thẳng (d) thoả mãn:

$$\begin{cases} \text{qua } A(2,0,-3) \\ \text{vtcp } \vec{a}(-31,-63,-8) \end{cases}.$$

a. *Phương trình tham số* của đường thẳng (d) là:

$$(d): \begin{cases} x = 2 - 31t \\ y = -63t \\ z = -3 - 8t \end{cases}, (t \in R).$$

b. *Phương trình chính tắc* của đường thẳng (d) là:

$$(d): \frac{x-2}{-31} = \frac{y}{-63} = \frac{z+3}{-8}.$$

c. Phương trình tổng quát của đường thẳng (d) là:

$$(d): \begin{cases} 63x - 31y - 126 = 0 \\ 8y - 63z - 189 = 0 \end{cases}.$$

Bài 4 (Đề 55-Va): Viết phương trình chính tắc của đường thẳng (d) biết:

$$(d): \begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}.$$

BÀI GIẢI

Lấy điểm M(2, -1, 0) ∈ (d).

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d) ta có:

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = \vec{a}\,(4, 14, 8).$$

Từ đó

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M(2,-1,0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(2,7,4) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}.$$

III. TỔNG KẾT PHƯƠNG PHÁP LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Bài toán 4: Lập phương trình đường thẳng trong không gian.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

a. *Để xác định phương trình tham số hoặc phương trình chính tắc của đường thẳng (d)* thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định một điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (d)$.

Bước 2: Xác định vtcp $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ của (d).

Bước 3: Khi đó:

- *Phương trình tham số* của (d) có dạng:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}, (t \in R),$$

- *Phương trình chính tắc* của (d) có dạng:

$$(d): \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

b. *Để xác định phương trình tổng quát của đường thẳng (d)* ta có thể lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: Coi (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Ta đi xác định phương trình tổng quát của (P) và (Q).

Cách 2: Thực hiện theo các bước

Bước 1: Xác định phương trình tham số của (d).

Bước 2: Khử t giữa x, y, z của phương trình tham số suy ra phương trình tổng quát.

Cách 3: Thực hiện theo các bước

Bước 1: Xác định phương trình chính tắc của (d).

Bước 2: Từ phương trình chính tắc suy ra phương trình tổng quát.

Chú ý. Một đường thẳng có vô số phương trình tham số, phương trình chính tắc và phương trình tổng quát.

IV.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm vtcp của các đường thẳng sau:

a. (d): $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{3}$.

b. (d): $\begin{cases} x-y+4z+10=0 \\ 2x-4y-z+6=0 \end{cases}$

Bài tập 2. Cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$\begin{cases} x-y+4z+10=0 \\ 2x-4y-z+6=0 \end{cases}.$$

Hãy viết phương trình tham số của đường thẳng đó.

Bài tập 3. Cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$\begin{cases} x-y+4z+10=0 \\ 2x-4y-z+6=0 \end{cases}.$$

Hãy viết phương trình chính tắc của đường thẳng đó.

Bài tập 4. Cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$\begin{cases} x=-t \\ y=2+2t \\ z=1+2t \end{cases}, (t\in R).$$

Hãy viết phương trình tổng quát của đường thẳng đó.

Bài tập 5. Lập phương trình tham số, chính tắc và tổng quát của đường thẳng (d) đi qua điểm A(2, 1, 3) và vuông góc với mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

a. (P): x+2y+3z-4=0

b. (P): $\begin{cases} x=4+3t_1+t_2 \\ y=4+t_1-2t_2 \\ z=-5-t_1+t_2 \end{cases}, (t_1, t_2\in R)$.

c. (P): $\begin{cases} x=-1+t_1 \\ y=2+t_2 \\ z=3-t_2 \end{cases}, (t_1, t_2\in R)$.

Bài tập 6. Lập phương trình tham số, chính tắc và tổng quát của đường thẳng (d) đi qua điểm A(1, 2, 3) và song song với đường thẳng (Δ) cho bởi:

a. $(\Delta): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + t \end{cases}, (t \in R)$.

b. $(\Delta): \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 4y + z + 1 = 0 \end{cases}$.

Bài tập 7. Lập phương trình tham số, chính tắc và tổng quát của đường thẳng (d) đi qua điểm A(1, 2, 3) và vuông góc với hai đường thẳng:

$$(d_1): \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2x + z - 3 = 0 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x - y + 4z + 10 = 0 \\ 2x - 4y - z + 6 = 0 \end{cases}.$$

Bài tập 8. Trong không gian Oxyz lập phương trình tham số, chính tắc và tổng quát của đường thẳng (d) đi qua điểm A(3, 2, 1), song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (Δ) biết:

$$(P): x+y+z-2=0 \text{ và } (\Delta): \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 4y + z + 1 = 0 \end{cases}.$$

CHỦ ĐỀ 3
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho đường thẳng (d) có một vtcp $\vec{a}$ và mặt phẳng (P) có một vtpt $\vec{n}$ và cặp vtcp $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$.

Căn cứ vào số điểm chung của (d) và (P) ta có ba trường hợp sau đây:

a. *Đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) không có điểm chung*: ta nói (d)//(P).

Vậy (d)//(P) khi một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

(i). Hệ phương trình tạo bởi đường thẳng và mặt phẳng vô nghiệm.

(ii). $\vec{a} \perp \vec{n}$ & tồn tại một điểm $A \in (d)$ nhưng $A \notin (P)$.

(iii). $\vec{a}$ là một vtcp của (P) & tồn tại một điểm $A \in (d)$ nhưng $A \notin (P)$..

Khi đó: khoảng cách từ mặt phẳng (P) đến đường thẳng (d) bằng khoảng cách từ điểm $A \in (d)$ đến (P).

b. *Đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có hai điểm chung phân biệt*: ta nói $(d) \subset (P)$ (hoặc mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d)). Vậy $(P) \supset (d)$ khi một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

(i). Hệ phương trình tạo bởi đường thẳng và mặt phẳng vô số nghiệm.

(ii). (P) đi qua hai điểm phân biệt A, B thuộc (d).

(iii). (P) đi qua điểm A thuộc (d) và nhận $\vec{a}$ làm một vtpt.

c. *Đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có 1 điểm chung A*: ta nói $(d) \cap (P) = \{A\}$.

Vậy $(d) \cap (P) = \{A\} \Leftrightarrow$ Hệ phương trình tạo bởi (d) và (P) có nghiệm duy nhất.

Trường hợp đặc biệt: $(d) \perp (P)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \vec{a} // \vec{n} & (1) \\ \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Bài toán 1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta chia làm hai trường hợp cơ bản sau:

Trường hợp 1: Đường thẳng có phương trình tham số, mặt phẳng có phương trình tổng quát. Khi đó ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thay (x, y, z) từ phương trình tham số của (d) vào phương trình tổng quát của (P), ta được phương trình: At+B=0. (1)

Bước 2: Biện luận:

- Nếu (1) vô nghiệm, khi đó $(d)\cap(P)=\varnothing \Leftrightarrow (d)//(P)$.
- Nếu (1) có nghiệm duy nhất, khi đó $(d)\cap(P)=\{A\}$ có toạ độ bằng cách thay t vào phương trình tham số của (d).
- Nếu (1) có vô số nghiệm, khi đó $(d)\subset(P)$.

Trường hợp 2: Đường thẳng, mặt phẳng đều có phương trình tổng quát. Khi đó ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P) theo các ẩn x, y, z.

Bước 2: Biện luận:

- Nếu hệ vô nghiệm, khi đó $(d)\cap(P)=\varnothing \Leftrightarrow (d)//(P)$.
- Nếu hệ có nghiệm duy nhất, khi đó $(d)\cap(P)=\{A\}$ có toạ độ là nghiệm của hệ
- Nếu hệ có vô số nghiệm, khi đó $(d)\subset(P)$.

Chú ý.

a. Các trường hợp khác nên đưa về một trong hai trường hợp trên.

b. Với bài toán chứa tham số cần giải và biện luận, nên đưa về trường hợp 1.

c. Cũng có thể tuân thủ theo nguyên tắc:

Bước 1: (P) có vtpt $\vec{n}(A, B, C)$.

Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}, t\in R \Rightarrow \text{vtcp } \vec{a}(a_1, a_2, a_3) \text{ và điểm } M(x_0, y_0, z_0)\in(d).$$

Bước 2: Tuỳ thuộc yêu cầu của bài toán

- Để chứng minh $(d)//(P)$ ta khẳng định

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{n} \\ M \notin (P) \end{cases}.$$

- Để chứng minh $(d)\subset(P)$ ta khẳng định

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{n} \\ M \in (P) \end{cases}.$$

- Để chứng minh $(d)\perp(P)$ ta khẳng định $\vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương.
- Để chứng tỏ $(d)\cap(P)=\{A\}$, ta thay (x, y, z) từ phương trình của (d) vào phương trình (P), ta được

$$Et+F=0 \Rightarrow t$$

Thay t vào phương trình tham số của (d) ta được toạ độ của điểm A.

Ví dụ 1: Xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) biết:

a. (d): $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$, (t∈R), (P): x-2y-z+3=0.

b. (d): $\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$, (P): y-z=0.

Giải.

a. Thay x, y, z từ phương trình của (d) vào phương trình của (P) ta được:

$(-1+t)-2(3-t)-(-2+t)+3=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow (d)\cap(P)=\{A\}$.

Thay t=1 vào phương trình tham số của (d) ta tìm được: A(0, 2, -1).

b. Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P), ta có:

$$\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Vậy (d)∩(P)=A(-1, 2, 2).

Ví dụ 2 (ĐHTCKT TP.HCM - 95): Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình :

(P): 4x-3y+7z-7=0 và (d): $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$.

Chứng tỏ rằng (d)⊂(P).

Giải.

Cách 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P) là:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \\ 4x - 3y + 7z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 9x - 5y - 7 = 0 \\ 18x - 10y - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 9x - 5y - 7 = 0 \end{cases}. \quad (I)$$

Hệ (I) có vô số nghiệm, do đó: (d)⊂(P).

Cách 2: Lấy hai điểm phân biệt $A(\frac{7}{9}, 0, \frac{5}{9})$, $B(0, -\frac{7}{5}, \frac{2}{5}) \in (d)$

Thay toạ độ của A, B vào phương trình của mặt phẳng (P), ta được:

$$\begin{cases} 4.\frac{7}{9} - 3.0 + 7.\frac{5}{9} - 7 = 0 \\ 4.0 - 3.(-\frac{7}{5}) + 7.\frac{2}{5} - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow A, B \in (P) \Rightarrow (d) \subset (P).$$

Cách 3: Xác định vtcp $\vec{a}$ của đường thẳng (d) , ta được: $\vec{a}$ (4, -3, 7).

Xác định vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P), ta được: $\vec{n}$ (4, -3, 7).

Lấy điểm $A(\frac{7}{9}, 0, \frac{5}{9}) \in (d)$.

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{n} \\ A \in (P) \end{cases} \Rightarrow (d) \subset (P).$$

Ví dụ 3: Biện luận theo tham số m vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) biết:

(P): $m^2x+2y+z+1-3m=0$,

(d): $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$, $(t\in R)$.

Giải.

Thay x, y, z từ phương trình của (d) vào phương trình của (P) ta được:

$m^2t+2(1-t)+3-2t+1-3m=0 \Leftrightarrow m^2t-4t+6-3m=0$

$\Leftrightarrow (m^2-4)x=3m-6.$ (1)

a. Nếu $m^2-4=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

- Với m=2, phương trình (1) $\Leftrightarrow 0x=0$.

  Vậy, phương trình nghiệm đúng với $\forall t\in R \Leftrightarrow (d)\subset(P)$.

- Với m=-2, phương trình (1) $\Leftrightarrow 0.t=-12$.

  Vậy, phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow (d)//(P)$.

b. Nếu $m^2-4\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 2$ và $m\neq -2$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{m+2}$, là nghiệm duy nhất.

Vậy, $(d)\cap(P)=\{A\}$ có toạ độ: $A(\dfrac{3}{m+2},\dfrac{m-1}{m+2},\dfrac{3m}{m+2})$.

Kết luận:

- Với $m\neq\pm 2$, thì $(d)\cap(P)=A(\dfrac{3}{m+2},\dfrac{m-1}{m+2},\dfrac{3m}{m+2})$.
- Với m=2, thì $(d)\subset(P)$.
- Với m=-2, thì $(d)//(P)$.

Bài toán 2: Giả sử $(d)\cap(P)=\{A\}$. Lập phương trình đường thẳng (d_1) qua A vuông góc với (d) và nằm trong mặt phẳng (P).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định toạ độ giao điểm A của (d) và (P).

Xác định vtcp $\vec{a}$ của (d).

Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng (Q) thoả mãn :

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } A \\ (Q)\perp(d) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{vtpt } \vec{a} \end{cases}.$$

Bước 3: Khi đó đường thẳng (d_1) chính là giao tuyến của (P) và (Q)

Ví dụ 4 (ĐHAN - 95): Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình

(P): x+y+z=0,

$$(d): \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 3x - 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

a. Tìm toạ độ giao điểm A của (d) và (P).

b. Lập phương trình đường thẳng (d_1) qua A vuông góc với (d) và nằm trong mặt phẳng (P).

Giải.

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P) là:

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 3x - 2z - 7 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(1, 1, -2).$$

Vậy $(d) \cap (P) = A(1, 1, -2)$.

b. Gọi $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta được: $\vec{a}(2, -1, 3)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng thoả mãn :

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } A \\ (Q) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } A(1,1,-2) \\ \text{vtpt } \vec{a}(2,-1,3) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 2x-y+3z+5=0.$$

Khi đó, đường thẳng (d_1) chính là giao tuyến của (P) và (Q).có phương trình cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}.$$

Bài toán 3: Cho họ đường thẳng (d_m) có phương trình cho bởi:

$$(d_m): \begin{cases} A_1(m)x + B_1(m)y + C_1(m)z + D_1(m) = 0 \\ A_2(m)x + B_2(m)y + C_2(m)z + D_2(m) = 0 \end{cases} \quad (I)$$

a. Tìm điểm cố định của họ đường thẳng (d_m).

b. CMR các đường thẳng trong họ (d_m) luôn thuộc một mặt phẳng cố định.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

a. Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giả sử $M(x_0, y_0, z_0)$ là điểm cố định của họ (d_m), ta được:

$$\begin{cases} A_1(m)x_0 + B_1(m)y_0 + C_1(m)z_0 + D_1(m) = 0 \\ A_2(m)x_0 + B_2(m)y_0 + C_2(m)z_0 + D_2(m) = 0 \end{cases}, \forall m. \quad (II)$$

Bước 2: Viết lại (II) dưới dạng phương trình theo ẩn số m.

Bước 3: Cho các hệ số bằng 0, ta được: (x_0, y_0, z_0).

b. Ta lựa chọn một trong hai cách lập luận sau:

Cách 1: Khử m từ hệ (I), ta được: Ax+By+Cz+D=0 (1)

Khi đó (1) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chùm mặt phẳng tạo bởi trục (d_m) có phương trình:

$$\alpha[A_1(m)x+B_1(m)y+C_1(m)z+D_1(m)]+\beta[A_2(m)x+$$
$$+B_2(m)y+C_2(m)z+D_2(m)]=0. \quad (2)$$

Bước 2: Lựa chọn các giá trị thích hợp của α, β, đưa (2) về dạng:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (3)$$

Khi đó (3) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

Ví dụ 5 (ĐHTCKT - 94): Cho họ đường thẳng (d_m) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x + mz - m = 0 \\ (1 - m)x - my = 0 \end{cases}. \quad (I)$$

a. Tìm điểm cố định của họ đường thẳng (d_m).

b. CMR các đường thẳng trong họ (d_m) luôn thuộc một mặt phẳng cố định.

Giải.

a. Giả sử $M(x_0, y_0, z_0)$ là điểm cố định của họ (d_m), ta được:

$$\begin{cases} x_0 + mz_0 - m = 0 \\ (1-m)x_0 - my_0 = 0 \end{cases}, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} m(z_0 - 1) + x_0 = 0 \\ -m(x_0 + y_0) + x_0 = 0 \end{cases}, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_0 - 1 = 0 \\ x_0 = 0 \\ x_0 + y_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 1 \end{cases}.$$

Vậy họ (d_m) luôn đi qua điểm cố định M(0, 0, 1).

b. Ta lựa chọn một trong hai cách lập luận sau:

Cách 1:

Từ hệ (I), ta được: $mx+my+mz-m=0 \Leftrightarrow x+y+z-1=0$. (1)

Khi đó (1) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

Cách 2:

Chùm mặt phẳng tạo bởi trục (d_m) có phương trình:

$$\alpha(x+mz-m)+\beta[(1-m)x-my]=0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta-\beta m)x-\beta my+\alpha mz-\alpha m=0. \quad (2)$$

Lựa chọn các giá trị thích hợp của α=1, β=-1, đưa (2) về dạng:

$$x+y+z-1=0 \quad (3)$$

Khi đó (3) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

2. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Bài toán 4: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho đường thẳng (d) có một vtcp $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$.

Cho mặt phẳng (P) có một vtpt $\vec{n}(A, B, C)$.

Số đo góc α $(0\le\alpha\le\pi/2)$ tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) được tính theo công thức:

$$\sin\alpha = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A+B+C}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \quad (*)$$

Hệ quả: $\alpha=0 \Leftrightarrow Aa_1+Ba_2+Ca_3=0$. Khi đó (d)//(P) hoặc (d) nằm trong (P).

$(d)\perp(P) \Leftrightarrow a_1: a_2: a_3=A:B:C$.

Ví dụ 6: Tính góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) biết:

$$(d): \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 + t \\ z = 4 + \sqrt{2}t \end{cases}, (t\in R); \ (P): x-y+\sqrt{2}z-7=0.$$

Giải.

Gọi α là góc giữa (d) và (P), áp dụng công thức (*) ta có:

$$\sin\alpha = \frac{|1.1 + (-1).1 + \sqrt{2}.\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1+2}.\sqrt{1+1+2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (ĐHGTVT-95): Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(P): 2x+my+z-5=0, (d): \begin{cases} 3x + y + 2z - 4 = 0 \\ x - y + 2z - 7 = 0 \end{cases}.$$

Tìm giá trị của m để:

a. (d)//(P).

b. $(d)\perp(P)$.

BÀI GIẢI

Gọi $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta được: $\vec{a}(-1, 1, 1)$.

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta được: $\vec{n}(2, m, 1)$.

a. (d)//(P)

$\Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow -1.2+1.m+1.1=0 \Leftrightarrow m=1$.

b. $(d)\perp(P)$

$\Rightarrow \vec{a}//\vec{n} \Leftrightarrow \frac{2}{-1} = \frac{m}{1} = \frac{1}{1}$ mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại m để $(d)\perp(P)$.

Bài 2 Biện luận theo a, b vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) biết

$$(d): \begin{cases} x = t \\ y = b + t \\ z = b - 2 \end{cases}, (t \in R), (P): a^2x - ay + z + 2 = 0.$$

BÀI GIẢI

Thay x, y, z từ phương trình của (d) vào phương trình của (P) ta được::

$a(a-1)t = b(a-1)$. (1)

a. Nếu $a^2 - a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1 \end{array}\right.$.

a.1. Với a=0, phương trình (1) $\Leftrightarrow 0.t = -b$.

- Với b=0, phương trình nghiệm đúng với mọi $t \in R \Leftrightarrow (d) \subset (P)$.
- Với $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow (d)//(P)$.

a.2. Với a=1, (1) $\Leftrightarrow 0.t = 0$, luôn đúng với $\forall t \in R \Leftrightarrow (d) \subset (P)$.

b. Nếu $a^2 - a \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow t = \frac{b}{a}$: phương trình có nghiệm duy nhất.

Vậy, $(d) \cap (P) = \{A\}$ có toạ độ: $A(\frac{b}{a}, \frac{ab+b}{a}, b-2)$.

Kết luận:

- Với a=b=0 hoặc a=1, thì $(d) \subset (P)$.
- Với a=0 và $b \neq 0$, thì $(d)//(P)$.
- Với $a \neq 0$ và $a \neq 1$, thì $(d) \cap (P) = A(\frac{b}{a}, \frac{ab+b}{a}, b-2)$.

Bài 3 (ĐHTL-98): Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình

$$(P): 2x + 5y + z + 17 = 0 \text{ và } (d): \begin{cases} 3x - y + 4z - 27 = 0 \\ 6x + 3y - z + 7 = 0 \end{cases}.$$

a. Tìm toạ độ giao điểm A của (d) và (P).

b. Lập phương trình đường thẳng (d_1) đi qua điểm A vuông góc với (d) và nằm trong mặt phẳng (P).

BÀI GIẢI

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P) là:

$$\begin{cases} 3x - y + 4z - 27 = 0 \\ 6x + 3y - z + 7 = 0 \\ 2x + 5y + z + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(2, -5, 4).$$

Vậy $(d) \cap (P) = A(2, -5, 4)$.

b. Gọi $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta được: $\vec{a}(-11, 27, 15)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng thoả mãn :

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } A \\ (Q) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } A(2,-5,4) \\ \text{vtpt } \vec{a}(-11,27,15) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): -11x + 27y + 15z + 97 = 0.$$

Khi đó, đường thẳng (d_1) chính là giao tuyến của (P) và (Q).có phương trình cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} 2x + 5y + z + 17 = 0 \\ -11x + 27y + 15z + 97 = 0 \end{cases}$$

Bài 4 (ĐH Đà Nẵng - 99): Cho họ đường thẳng (d_m) có phương trình

$$(d): \begin{cases} x + 4mz - 3m = 0 \\ (1 - m)x - my = 0 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

a. Tìm điểm cố định của họ đường thẳng (d_m).

b. CMR các đường thẳng trong họ (d_m) luôn thuộc một mặt phẳng (P) cố định.

c. Tính thể tích khối tứ diện giới hạn bởi mặt phẳng (P) và các mặt phẳng toạ độ.

BÀI GIẢI

a. Giả sử $M(x_0, y_0, z_0)$ là điểm cố định của họ (d_m), ta được:

$$\begin{cases} x_0 + 4mz_0 - 3m = 0 \\ (1 - m)x_0 - my_0 = 0 \end{cases}, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} m(4z_0 - 3) + x_0 = 0 \\ -m(x_0 + y_0) + x_0 = 0 \end{cases}, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4z_0 - 3 = 0 \\ x_0 = 0 \\ x_0 + y_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 3/4 \end{cases}.$$

Vậy họ (d_m) luôn đi qua điểm cố định $M(0, 0, \frac{3}{4})$.

b. Ta lựa chọn một trong hai cách lập luận sau:

Cách 1:

Từ hệ (I), ta được: $mx+my+4mz-3m=0 \Leftrightarrow x+y+4z-3=0$. (1)

Khi đó (1) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

Cách 2:

Chùm mặt phẳng tạo bởi trục (d_m) có phương trình:

$\alpha(x+4mz-3m)+\beta[(1-m)x-my]=0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta-\beta m)x-\beta my+4\alpha mz-3\alpha m=0$. (2)

Lựa chọn các giá trị thích hợp của $\alpha=1$, $\beta=-1$, đưa (2) về dạng:

$x+y+4z-3=0$ (3)

Khi đó (3) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

c. Ta có:

$(P)\cap Ox=A(3, 0, 0)$; $(P)\cap Oy=B(0, 3, 0)$; $(P)\cap Oz=C(0, 0, \frac{3}{4})$.

Thể tích khối tứ diện OABC được cho bởi:

$$V=\frac{1}{3}OA.S_{\Delta OBC}=\frac{1}{3}OA.\frac{1}{2}OB.OC=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}.3.3.\frac{3}{4}=\frac{9}{8} \text{ (đvtt)}.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) biết:

a. (d): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$, $(t \in R)$, (P): x-y-z+3=0.

b. (d): $\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$, $(t \in R)$ và (P): y+4z+17=0.

c. (d): $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 10 = 0 \\ x + y + z + 5 = 0 \end{cases}$ và (P): y+4z+17=0.

d. (d): $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$ và (P): x+y-2=0.

Bài tập 2. Hãy tính số đo góc tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) cho bởi:

a. (d): $\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$, $(t \in R)$ và (P): $\begin{cases} x = -1 + t_1 \\ y = 2 + t_2 \\ z = 3 - t_2 \end{cases}$, $(t_1, t_2 \in R)$.

b. (d): $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 10 = 0 \\ x + y + z + 5 = 0 \end{cases}$ và (Q): $\begin{cases} x = 2 - t_1 + t_2 \\ y = -1 + 2t_2 \\ z = -t_1 \end{cases}$, $(t_1, t_2 \in R)$.

c. (d): $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}t \\ y = -2 + t \\ z = 2 + \sqrt{2}t \end{cases}$, $(t \in R)$ và (P): x-2y+2z+3=0.

Bài tập 3. (ĐHNN & TH - 98): Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình

$$(P): 2x+y+z=0 \text{ và } (d): \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}.$$

a. Tìm toạ độ giao điểm A của (d) và (P).

b. Lập phương trình đường thẳng (d_1) qua A vuông góc với (d) và nằm trong mặt phẳng (P).

Bài tập 4. (Đề thi Đại học Khối A - 2002): Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d_m) có phương trình :

$$(P): 2x-y+2=0,\ (d_m): \begin{cases} (2m + 1)x + (1 - m)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m + 1)z + 4m + 2 = 0 \end{cases}.$$

Xác định m để $(d_m)//(P)$.

CHỦ ĐỀ 4
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ta biết rằng:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_3b_2c_1 + a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2).$$

Giá trị của định thức cấp 3 bằng tổng của ba đường chéo chính trừ đi tổng ba đường chéo phụ.

Một trong các ứng dụng quan trọng của định thức cấp ba là việc xác định giá trị của tích hỗn tạp của ba vectơ, từ đó có thể kết luận được vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian. Ta có bài toán sau:

Bài toán 1: Ứng dụng tích hỗn tạp xét vị trí tương đối của hai đường thẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho 2 đường thẳng phân biệt (d_1) và (d_2) theo thứ tự có vtcp là:

$\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$.

Lấy $A(x_A, y_A, z_A) \in (d_1)$ và $B(x_B, y_B, z_B) \in (d_2)$ (lưu ý $A \neq B$).

Xét tích hỗn tạp của ba vectơ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{AB}$ là:

$$D(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \end{vmatrix}.$$

- Nếu $D(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{AB}) = 0$ thì (d_1) và (d_2) đồng phẳng.
- Nếu $D(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{AB}) \neq 0$ thì (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Ví dụ 1: Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình cho bởi:

a. $(d_1): \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-4}{3}$, $(d_2): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$.

b. $(d_1): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = u + 2 \\ y = -3 + 2u \\ z = 3u + 1 \end{cases}$.

Giải.

a. Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1), (d_2), ta có: $\vec{a}_1(-2, 1, 3)$, $\vec{a}_2(1, -1, 3)$.

Lấy $A(1, -2, 4) \in (d_1)$ và $B(-1, 0, -2) \in (d_2)$ (lưu ý $A \neq B$), suy ra $\overrightarrow{AB}(-2, 2, -6)$.

Xét tích hỗn tạp của ba vectơ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{AB}$ là:

$$D(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Vậy, hai đường thẳng (d_1) và (d_2) đồng phẳng (và vì $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ không cùng phương $\Rightarrow$ (d_1) & (d_2) cắt nhau).

b. Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có: $\vec{a}_1(2, 1, 3)$, $\vec{a}_2(1, 2, 3)$..

Lấy $A(1, 2, -3) \in (d_1)$ và $B(2, -3, 1) \in (d_2)$ (lưu ý $A \neq B$), suy ra $\overrightarrow{AB}(1, -5, 4)$.

Xét tích hỗn tạp của ba vectơ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{AB}$ là:

$$D(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0.$$

Vậy, hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Bài toán 2: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

- Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) & (d_2). Khi đó có 3 khả năng xảy ra:

Khả năng 1. Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (d_1), (d_2) cắt nhau và khi đó nghiệm x, y, z của hệ là toạ độ giao điểm.

Khả năng 2. Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ $(d_1) \equiv (d_2)$.

Khả năng 3. Hệ vô nghiệm, khi đó ta đi xác định hai vtcp $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ của (d_{1l}) và (d_2). Ta có :

- Nếu $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ cùng phương $\Leftrightarrow$ $(d_1) // (d_2)$.
- Nếu $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ không cùng phương $\Leftrightarrow$ (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Ví dụ 2: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2), cho bởi:

a. $(d_1): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases}$, $(d_2): \begin{cases} x = u + 2 \\ y = 1 + 2u \\ z = u + 1 \end{cases}$.

b. $(d_1): \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 & (1) \\ y + z - 1 = 0 & (2) \end{cases}$, $(d_2): \begin{cases} x - 2y - 2z + 9 = 0 & (3) \\ y - z + 1 = 0 & (4) \end{cases}$.

Giải.

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2), ta có:

$$\begin{cases} 2t + 1 = u + 2 \\ t + 2 = 1 + 2u \\ 3t - 1 = u + 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = u = 1.$$

Thay t=1 vào phương trình của (d_1), ta được $I(3, 3, 2)$.

Vậy $(d_1)\cap(d_2)$=I(3, 3, 2).

b. Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (4), ta được : x=2, y=0, z=1.

Thay vào (4), ta được: 2-2.0-2.1+9=0 mâu thuẫn.

Vậy (d_1) và (d_2) không có điểm chung.

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là một vtcp của đường thẳng (d_1) và (d_2), ta có:

$$\vec{a}_1\left(\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix}\right) = \vec{a}_1(0, -1, 1)$$

$$\vec{a}_2\left(\begin{vmatrix}-2 & -2\\1 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-2 & 1\\-1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{vmatrix}\right) = \vec{a}_2(4, 1, 1)$$

$\Rightarrow \vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ không cùng phương.

Kết kuận: hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Bài toán 3: Cho hai đường thẳng chéo nhau (d_1) và (d_2).

Viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều (d_1), (d_2).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1), (d_2).

Lấy $A\in(d_1)$ và $B\in(d_2)$ $\Rightarrow$ toạ độ trung điểm I của AB.

Bước 2: Khi đó:

$$(P): \begin{cases}\text{qua I}\\ \text{cap vtcp } \vec{a}_1 \ \& \ \vec{a}_2\end{cases}.$$

Ví dụ 3: Cho hai đường thẳng chéo nhau (d_1) và (d_2), cho bởi Ví dụ 1.b. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều (d_1), (d_2).

Giải.

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có: $\vec{a}_1(2, 1, 3)$, $\vec{a}_2(1, 2, 3)$.

Lấy A(1, 2, -3)$\in(d_1)$ và B(2, -3, 1)$\in(d_2)$.

Gọi I là điểm I của AB $\Rightarrow I(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$

Khi đó:

$$(P): \begin{cases}\text{qua I}\\ \text{cap vtcp } \vec{a}_1 \ \& \ \vec{a}_2\end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases}x = 3/2 + 2t_1 + t_2\\ y = -1/2 + t_1 + 2t_2\\ z = -1 + 3t_1 + 3t_2\end{cases}, (t_1, t_2\in R).$$

Bài toán 4: Cho hai đường thẳng song song (d_1) và (d_2).

Viết phương trình đường thẳng (d) song song, cách đều (d_1), (d_2) và thuộc mặt phẳng chứa hai đường thẳng (d_1), (d_2).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định $\vec{a}$ là vtcp của (d_1), (d_2).

Lấy $A\in(d_1)$ và $B\in(d_2)$ $\Rightarrow$ toạ độ trung điểm I của AB.

Bước 2: Khi đó:

$$(d): \begin{cases}\text{qua I}\\ \text{vtcp } \vec{a}\end{cases}.$$

Ví dụ 4: Viết phương trình đường thẳng (d) song song, cách đều (d_1), (d_2) và thuộc mặt phẳng chứa hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình cho bởi:

$$(d_1): \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}, \ (d_2): \frac{x}{3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+7}{4}.$$

Giải.

Gọi $\vec{a}$ là vtcp của (d_1), ta có: $\vec{a}$ (3, -1, 4).

Lấy $A(-2, 5, 9) \in (d_1)$ và $B(0, -3, -7) \in (d_2)$

$\Rightarrow$ trung điểm của AB là I(-1, 1 ,1).

Khi đó:

$$(d): \begin{cases} \text{qua I} \\ \text{vtcp } \vec{a} \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, (t \in R).$$

> **Bài toán 5**: Cho hai đường thẳng cắt nhau (d_1) và (d_2). Viết phương trình đường phân giác của (d_1), (d_2).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định tạo độ giao điểm I của (d_1) và (d_2).
Lấy $A \in (d_1)$ $(A \neq I)$.

Bước 2: Gọi $B \in (d_2)$ thoả mãn AI=BI $\Rightarrow$ toạ độ hai điểm B_1, B_2.

Bước 3: Ta có:

- Với $B_1 \Rightarrow$ toạ độ trung điểm I_1 của AB_1.
  Khi đó phương trình đường phân giác thứ nhất được xác định bởi:
  $$(\Delta_1): \begin{cases} \text{qua I} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{II_1} \end{cases}.$$
- Với $B_2 \Rightarrow$ toạ độ trung điểm I_2 của AB_2.
  Khi đó phương trình đường phân giác thứ hai được xác định bởi:
  $$(\Delta_2): \begin{cases} \text{qua I} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{II_2} \end{cases}.$$

Lưu ý:

1. Để giảm độ phức tạp cho bài toán, tốt nhất nên chọn (d_2) cho dưới dạng phương trình tham số.
2. Ta có kết quả:
   a. Nếu $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB_1} > 0$ thì (Δ_1) và (Δ_2) theo thứ tự là phương trình đường phân giác góc nhọn, góc tù của góc tạo bởi (d_1), (d_2).
   b. Nếu $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB_1} < 0$ thì (Δ_1) và (Δ_2) theo thứ tự là phương trình đường phân giác góc tù, góc nhọn của góc tạo bởi (d_1), (d_2).
3. Nếu bài toán yêu cầu lập phương trình mặt phẳng phân giác (P) của góc tạo bởi (d_1), (d_2), ta có:
   $$(P): \begin{cases} \text{qua I} \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

Ví dụ 5: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}, (t \in R) \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = 2u - 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, (u \in R).$$

a. CMR(d_1) và (d_2) cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm của chúng.

b. Viết phương trình đường phân giác của (d_1), (d_2).

Giải

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2), ta có:

$$\begin{cases} 0 = 2u - 2 \\ 1 = 1 \\ 1 - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = u = 1.$$

Thay t=1 vào phương trình của (d_1), ta được I(0, 1, 0).

Vậy $(d_1) \cap (d_2) = I(0, 1, 0)$.

b. Lấy $A(0, 1, 2) \in (d_1)$, $(A \neq I)$.

Gọi $B(2u-2, 1, 0) \in (d_2)$ thoả mãn:

$$AI = BI \Leftrightarrow AI^2 = BI^2 \Leftrightarrow 4 = (2u-2)^2 \Leftrightarrow u = 0 \lor u = 2.$$

Vậy tồn tại hai điểm : $B_1(-2, 1, 0)$ & $B_2(2, 1, 0)$ thoả mãn.

Ta có:

- Với $B_1(-2, 1, 0) \Rightarrow$ toạ độ trung điểm I_1 của AB_1 là: $I_1(-1, 1, 1)$.
  Khi đó phương trình đường phân giác thứ nhất được xác định bởi:

$$(\Delta_1): \begin{cases} \text{qua } I(0,1,0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{II_1}(-1,0,1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta_1): \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, (t \in R).$$

- Với $B_2(2, 1, 0) \Rightarrow$ toạ độ trung điểm I_2 của AB_2 là: $I_2(1, 1, 1)$.
  Khi đó phương trình đường phân giác thứ hai được xác định bởi:

$$(\Delta_2): \begin{cases} \text{qua } I(0,1,0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{II_1}(1,0,1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta_2): \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, (t \in R).$$

II.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Sử dụng tích hỗn tạp xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình cho bởi:

a. $(d_1): \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$, và $(d_2): \begin{cases} 4x + y - 19 = 0 \\ x - z + 15 = 0 \end{cases}$.

b. $(d_1): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = u + 2 \\ y = -3 + 2u \\ z = 3u + 1 \end{cases}$.

c. $(d_1): \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$, $(d_2): \begin{cases} 3x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$.

Bài tập 2. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 - t \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = 3 + 2t_1 \\ y = -3 - t_1 \\ z = 1 - t_1 \end{cases} \quad (t, t_1 \in R).$$

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) song song với nhau.

b. Viết phương trình đường thẳng (d) song song, cách đều (d_1), (d_2) và thuộc mặt phẳng chứa (d_1), (d_2).

Bài tập 3. Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình cho bởi:

$$(d_1): \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}, (d_2): \frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+18}{4}.$$

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) song song với nhau.

b. Viết phương trình đường thẳng (d) song song, cách đều (d_1), (d_2) và thuộc mặt phẳng chứa (d_1), (d_2).

Bài tập 4. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}, (t \in R), (d_2): \begin{cases} 4x + y - 19 = 0 \\ x - z + 15 = 0 \end{cases}.$$

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) cắt nhau.

b. Viết phương trình đường phân giác của (d_1), (d_2).

Bài tập 5. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình cho bởi:

$$(d_1): \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}, (d_2): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, (t \in R).$$

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) cắt nhau.

b. Viết phương trình đường phân giác của (d_1), (d_2).

Bài tập 6. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có:

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = 2t_1 \\ y = 1 + t_1 \\ z = t_1 \end{cases} \quad (t, t_1 \in R).$$

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.

b. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều (d_1), (d_2).

Bài tập 7. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có:

$$(d_1): \begin{cases} x + 8z + 23 = 0 \\ y - 4z + 10 = 0 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}.$$

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.

b. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều (d_1), (d_2).

Bài tập 8. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có:

$$(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} \quad (d_2): \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.

b. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều (d_1), (d_2).

CHỦ ĐỀ 5
HAI ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG PHẲNG VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Hai đường thẳng (d_1) và (d_2) đồng phẳng khi xảy ra một trong các trường hợp sau:

1 (d_1) và (d_2) cắt nhau.

2 (d_1) và (d_2) song song với nhau.

Bài toán 1: Xác định toạ độ giao điểm của hai đường thẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để xác định giao điểm của (d_1) và (d_2) ta chia làm ba trường hợp:

Trường hợp 1: Cả hai phương trình đều có dạng tham số. Ta thực hện theo các bước:

Bước 1: Viết lại phương trình của (d_1) theo tham số t_1 và phương trình của (d_2) theo tham số t_2.

Bước 2: Lập hệ.

Bước 3: Thay t_1 (hoặc t_2) vào phương trình của (d_1) (hoặc (d_2)) được toạ độ giao điểm.

Trường hợp 2: Một phương trình có dạng tham số, phương trình còn lại có dạng tổng quát. Ta thực hện theo các bước:

Bước 1: Thay (x, y, z) ở dạng tham số của một đường thẳng vào phương trình tổng quát của đường thẳng còn lại, ta được một hệ hai phương trình theo t.

Bước 2: Nếu hệ có nghiệm duy nhất t thì hai đường thẳng đó có cắt nhau.

Bước 3: Thay t vào phương trình tham số của đường thẳng ta được toạ độ giao điểm.

Trường hợp 3: Cả hai phương trình đều có dạng tổng quát. Ta thực hện theo các bước:

Bước 1: Lập hệ 3 phương trình với 3 ẩn x, y, z từ 4 phương trình của hai đường thẳng.

Bước 2: Nếu hệ có nghiệm duy nhất (x, y, z) thì thay chúng vào phương trình còn lại, nếu (x, y, z) nghiệm đúng phương trình này thì (x, y, z) là toạ độ giao điểm.

Chú ý: Nếu gặp phương trình chính tắc, ta chuyển về dạng tham số.

Ví dụ 1: Xác định toạ độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2), cho bởi:

a. $(d_1): \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 3t - 2 \\ z = 6 + 4t \end{cases}$, $(d_2): \begin{cases} 4x + y - 19 = 0 \\ x - z + 15 = 0 \end{cases}$

b. $(d_1): \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 & (1) \\ x - y + z - 1 = 0 & (2) \end{cases}$, $(d_2): \begin{cases} 3x + y - z + 3 = 0 & (3) \\ 2x - y + 1 = 0 & (4) \end{cases}$.

Giải.

a. Thay x, y, z ở phương trình của (d_1) vào (d_2), ta được:

$$\begin{cases} 4(-3 + 2t) + (-2 + 3t) - 19 = 0 \\ (-3 + 2t) - (6 + 4t) + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow t=3.$$

Thay t=3 vào phương trình (d_1), ta được I(3, 4, 18).

Vậy $(d_1) \cap (d_2)$=I(3, 4, 18).

b. Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (4), ta được :

$x=-\frac{1}{2}$, y=0, $z=\frac{3}{2}$.

Thay vào (3) thấy luôn đúng.

Vậy $(d_1) \cap (d_2)=I(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$.

Bài toán 2: Cho hai đường thẳng phân biệt (d_1) và (d_2) đồng phẳng. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biết rằng hai đường thẳng (d_1),(d_2) đồng phẳng

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (d_1)//(d_2) \\ (d_1) \cap (d_2) = M \end{array}\right.$$

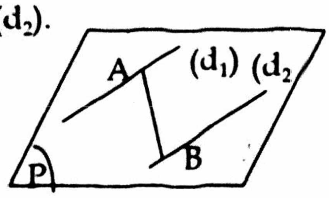
Vậy, để xác định (P) chứa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn hai điểm A, B theo thứ tự thuộc (d_1), (d_2).

Bước 2: Tìm một vtcp $\vec{a}_1$ của (d_1). Khi đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{hai vtcp } \vec{a}_1 \ \& \ \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$



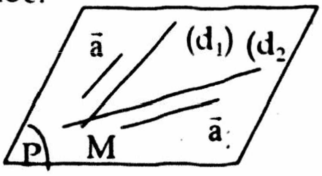
Từ đó ta có được phương trình tham số của mặt phẳng (P).

Đặc biệt: $(d_1) \cap (d_2)=M(x_M, y_M)$. Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định vtcp $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ của (d_1) và (d_2)

Bước 2: Phương trình (P) được xác định bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M \\ \text{hai vtcp } \vec{a}_1 \ \& \ \vec{a}_2 \end{cases}.$$



Từ đó ta có được phương trình tham số của mặt phẳng (P).

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn điểm A thuộc (d_1) và không thuộc (d_2).

Bước 2: Xác định mặt phẳng (P) thuộc chùm tạo bởi trục (d_2) và đi qua điểm A.

***Chú ý*:** Nếu (d_1) và (d_2) đồng phẳng (thuộc mặt phẳng (P)) thì phương trình hình chiếu song song của (d_1) theo phương (d_2) lên mặt phẳng (Q) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} x = 6 + 3t_1 \\ y = -1 - 2t_1 \\ z = -2 + t_1 \end{cases} \quad (t, t_1 \in R).$$

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) cắt nhau.

b. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2).

Giải.

a. Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(2, 1, 4)$ và $\vec{a}_2(3, -2, 1)$.

Lấy $A(1, 7, 3) \in (d_1)$ và $B(6, -1, -2) \in (d_2)$ (lưu ý $A \neq B$), suy ra $\overrightarrow{AB}(5, -8, -5)$.

Xét tích hỗn tạp của ba vectơ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{AB}$ là:

$$D(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Suy ra, (d_1) và (d_2) đồng phẳng.

Mặt khác: $\vec{a}_1$ không cùng phương với $\vec{a}_2$.

Vậy (d_1) và (d_2) cắt nhau.

b. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2).

Cách 1: Gọi (P) là mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2), khi đó

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(1,7,3) \\ \text{hai vtcp } \vec{a}_1(2,1,4) \ \& \ \vec{a}_2(3,-2,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} x = 1 + 2t_1 + 3t_2 \\ y = 7 + t_1 - 2t_2 \\ z = 3 + 4t_1 + t_2 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \in R).$$

Đó chính là phương trình tham số của mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2).

Cách 2: Sử dụng tích hỗn tạp.

Điểm $M(x, y, x) \in (P) \Leftrightarrow D(\overrightarrow{AM}, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-7 & z-3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}(x-1) + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}(y-7) + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}(z-3) = 0$$

$\Leftrightarrow 9x + 10y - 7z - 58 = 0.$

Đó chính là phương trình tổng quát của (P).

Ví dụ 3: Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình

$$(d_1): \frac{x-2}{4}=\frac{y}{-6}=\frac{z+1}{-8} \text{ và } (d_2): \frac{x-7}{-6}=\frac{y-2}{9}=\frac{z}{12}.$$

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) song song.

b. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2).

c. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

Giải.

a. Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(4,-6,-8)$ và $\vec{a}_2(-6,9,12) \Rightarrow \vec{a}_1 // \vec{a}_2$

Mặt khác lấy $A(2, 0, -1) \in (d_1)$, nhận thấy rằng $A \notin (d_2) \Rightarrow (d_1)//(d_2)$.

b. Lấy $B(7, 2, 0) \in (d_2)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2), khi đó

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(2,0,-1) \\ \text{hai vtcp } \vec{a}_1(-2,3,4) \ \& \ \overrightarrow{AB}(5,2,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} x = 2 - 2t_1 + 5t_2 \\ y = 3t_1 + 2t_2 \\ z = -1 + 4t_1 + t_2 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \in R).$$

c. Vì $(d_1)//(d_2)$, nên khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) (bằng khoảng cách từ A đến (d_2)), được xác định bởi công thức:

$$d((d_1), (d_2)) = d(A, (d_2)) = \frac{|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{a_2}]|}{|\overrightarrow{a_2}|} = \sqrt{\frac{854}{29}}.$$

Ví dụ 4: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình là:

$$(d_1): \begin{cases} x + 3z - 10 = 0 & (1) \\ y + 1 = 0 & (2) \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} 2y - z + 2 = 0 & (3) \\ x - 7y + 3z - 17 = 0 & (4) \end{cases}.$$

a. CMR (d_1) và (d_2) cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm I của chúng.

b. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2).

Giải.

a. Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3), ta được : $x=10$, $y=-1$, $z=0$.

Thay vào (4) thấy luôn đúng.

Vậy $(d_1) \cap (d_2) = I(10, -1, 0)$.

b. Chọn $A(12, 1, 4)$, nhận thấy:

$$\begin{cases} A \notin (d_1) \\ A \in (d_2) \end{cases}.$$

Vậy, (P) đi qua hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

$$\Leftrightarrow (P): \begin{cases} (d_1) \subset (P) \\ A \in (P) \end{cases}.$$

Đường thẳng $(d_1) \subset (P) \Rightarrow$ (P) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d_1) có dạng:

$(P): x+3z-10+m(y+1)=0 \Leftrightarrow (P): x+my+3z-10+m=0$ (5)

Điểm $A(12, 1, 4) \in (P) \Leftrightarrow 12+m.1+3.4-10+m=0 \Leftrightarrow m=-7$.

Thay $m=-7$ vào (5) được $(P): x-7y+3z-17=0$.

Ví dụ 5. (ĐHKTQD - 97): Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình là:

$$(d_1): \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3},\ (d_2): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \end{cases},\ (t \in R).$$

a. CMR (d_1) và (d_2) cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm I của chúng.

b. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2).

Giải.

a. Thay x, y, z từ phương trình tham số của (d_2) vào phương trình chính tắc của (d_1), ta được:

$$\frac{-1+t-1}{-2} = \frac{-t+2}{1} = \frac{-2+3t-4}{3} \Leftrightarrow t=2.$$

Vậy $(d_1) \cap (d_2) = A(1, -2, 4)$.

b. Ta có:

Cách 1.

Gọi $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(-2, 1, 3)$ và $\vec{a}_2(1, -1, 3)$.

Mặt phẳng đi qua hai đường thẳng (d_1) và (d_2), được xác định bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(1,-2,4) \\ \text{hai vtcp } \vec{a}_1(-2,1,3) \ \& \ \vec{a}_2(1,-1,3) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A(1,-2,4) \\ \text{vtpt } \vec{n}(6,9,1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $6(x-1)+9(y+2)+z-4=0 \Leftrightarrow$ (P): $6x+9y+z+8=0$.

Đó chính là phương trình tổng qúat của mặt phẳng (P).

Cách 2: Sử dụng tích hỗn tạp.

Điểm $M(x, y, x) \in (P) \Leftrightarrow D(\overrightarrow{AM}, \vec{a}_1, \vec{a}_2)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}(x-1) + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}(y+2) + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}(z-4)=0 \Leftrightarrow 6x+9y+z+8=0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của (P).

Cách 3: Sử dụng chùm mặt phẳng.

Chọn B(-1, 0, -2), nhận thấy: $\begin{cases} B \notin (d_1) \\ B \in (d_2) \end{cases}$.

Vậy, (P) đi qua hai đường thẳng (d_1) và $(d_2) \Leftrightarrow (P): \begin{cases} (d_1) \subset (P) \\ B \in (P) \end{cases}$.

Chuyển phương trình (d_1) về dạng tổng quát:

$$\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 3x + 2z - 11 = 0 \end{cases}.$$

Đường thẳng $(d_1) \subset (P) \Rightarrow$ (P) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d_1) có dạng:

(P): $3x+2z-11+m(x+2y+3)=0 \Leftrightarrow$ (P): $(3+m)x+2my+2z-11+3m=0$ (1)

Điểm $B(-1, 0, -2) \in (P) \Leftrightarrow (3+m)(-1)+2m.0+2(-2)-11+3m=0 \Leftrightarrow m=9$.

Thay m=9 vào (1) được (P): $6x+9y+z+8=0$.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (ĐHSP Qui nhơn-99): Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình

$$(d_1): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 - t \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = 3 + 2t_1 \\ y = -3 - t_1 \\ z = 1 - t_1 \end{cases} (t, t_1 \in R).$$

a. Chứng tỏ rằng (d_1), (d_2) song song.

b. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d_1), (d_2).

BÀI GIẢI

a. *Chứng tỏ rằng (d_1), (d_2) song song*

Gọi $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), khi đó:

$\vec{a}_1 (2, -1, -1)$ và $\vec{a}_2 (2, -1, -1) \Rightarrow \vec{a}_1 // \vec{a}_2$.

Mặt khác hệ phương trình tạo bởi (d_1), (d_2) vô nghiệm.

Vậy (d_1), (d_2) song song với nhau.

b. *Viết phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2)*

Cách 1. Lấy $A(3, 1, 5) \in (d_1)$ và $B(3, -3, 1) \in (d_2)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2), khi đó

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(3,1,5) \\ \text{hai vtcp } \vec{a}_1(2,-1,-1) \ \& \ \overrightarrow{AB}(0,-4,-4) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} x = 3 + 2t_1 \\ y = 1 - t_1 - 4t_2 \\ z = 5 - t_1 - 4t_2 \end{cases} (t_1, t_2 \in R).$$

Cách 2. Lấy $A(3, 1, 5) \in (d_1)$.

Chuyển phương trình (d_2) về dạng tổng quát:

$$(d_2): \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ y - z + 4 = 0 \end{cases}.$$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2) $\Rightarrow$ (P) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d_2), có dạng:

(P): $y-z+4+m(x+2y+3)=0 \Leftrightarrow (P)$: $mx+(1+2m)y-z+3m+4=0$ (1)

Điểm $A(3, 1, 5) \in (P) \Rightarrow 3m+(1+2m)-5+3m+4=0 \Leftrightarrow m=0$.

Thay m=0 vào (1), được (P): $y-z+4=0$.

Bài 2 (ĐHKT-98): Cho hai đường thẳng song song (d_1), (d_2) có phương trình

$$(d_1): \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}, (d_2): \frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+18}{4}.$$

a. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2).

b. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

BÀI GIẢI

a. Lấy $A(-7, 5, 9) \in (d_1)$ và $B(0, -4, -18) \in (d_2)$.

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d_1) và (d_2), ta có $\vec{a}$ (3, -1, 4)

Gọi (P) là mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2), khi đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(-7,5,9) \\ \text{hai vtcp } \vec{a}(3,-1,4) \\ \qquad \overrightarrow{AB}(7,-9,-27) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} x = -7 + 3t_1 + 7t_2 \\ y = 5 - t_1 - 9t_2 \\ z = 9 + 4t_1 - 27t_2 \end{cases} (t_1, t_2 \in R).$$

b. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2): vì $(d_1)//(d_2)$, nên khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) bằng khoảng cách từ điểm A đến (d_2), được xác định bởi công thức:

$$d((d_1), (d_2))=d(A, (d_2)) = \frac{|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{a_2}]|}{|\overrightarrow{a_2}|} = 25.$$

Bài 3 (PVBC & TT-98): Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình là:

$$(d_1): \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 & (1) \\ x - y + z - 1 = 0 & (2) \end{cases}, (d_2): \begin{cases} 3x + y - z + 3 = 0 & (3) \\ 2x - y + 1 = 0 & (4) \end{cases}.$$

a. CMR hai đường thẳng đó cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm I của chúng.

b. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

BÀI GIẢI

a. Ví dụ 1.b, ta có: $(d_1)\cap(d_2)=I(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$

b. Ta có:

Cách 1. Chọn A(0, 1, 4), nhận thấy:

$$\begin{cases} A \notin (d_1) \\ A \in (d_2) \end{cases}.$$

Vậy, (P) đi qua hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

$$\Leftrightarrow (P): \begin{cases} (d_1) \subset (P) \\ A \in (P) \end{cases}.$$

Đường thẳng $(d_1)\subset(P) \Rightarrow$ (P) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d) có dạng:

(P): $2x+y+1+m(x-y+z-1)=0$

$\Leftrightarrow$ (P): $(2+m)x+(1-m)y+mz+1-m=0$ (5)

Điểm $A(0, 1, 4)\in(P) \Leftrightarrow (2+m).0+(1-m).1+m.4+1-m =0 \Leftrightarrow m=-1$.

Thay $m=-1$ vào (5) được (P): $x+2y-z+2=0$.

Cách 2. (Sử dụng tích hỗn tạp)

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có:

$$\vec{a}_1\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_1(1, -2, -3) \text{ chọn } \vec{a}_1(-1, 2, 3);$$

$$\vec{a}_2\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_2(-1, -2, -5) \text{ chọn } \vec{a}_2(1, 2, 5).$$

Điểm $M(x, y, x)\in(P) \Leftrightarrow D(\overrightarrow{IM}, \vec{a}_1, \vec{a}_2)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1/2 & y & z-3/2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}(x+\frac{1}{2}) + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}.y + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.(z-\frac{3}{2}) = 0$$

$\Leftrightarrow x+2y-z+2=0$

Đó chính là phương trình tổng quát của (P).

Bài 4 (ĐHTS/A-98): Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}, (t \in R), (d_2): \begin{cases} 4x + y - 19 = 0 \\ x - z + 15 = 0 \end{cases}.$$

a. CMR hai đường thẳng đó cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm I của chúng.

b. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

BÀI GIẢI

a. Thay x, y, z ở phương trình của (d_1) vào (d_2), ta được:

$$\begin{cases} 4(-3 + 2t) + (-2 + 3t) - 19 = 0 \\ (-3 + 2t) - (6 + 4t) + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow t=3.$$

Thay t=3 vào phương trình (d_1), ta được I(3, 7, 18).

Vậy $(d_1) \cap (d_2)$=I(3, 7, 18).

b. Chọn A(-3, -2, 6), nhận thấy:

$$\begin{cases} A \notin (d_2) \\ A \in (d_1) \end{cases}.$$

Vậy, (P) đi qua hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

$$\Leftrightarrow (P): \begin{cases} (d_2) \subset (P) \\ A \in (P) \end{cases}.$$

Vì $(d_2) \subset (P) \Rightarrow$ (P) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d) có dạng:

(P): $4x+y-19+m(x-z+15)=0$

$\Leftrightarrow$ (P): $(4+m)x+y-mz-19+15m=0$ (1)

Điểm A(-3, -2, 6)$\in$(P) $\Leftrightarrow$ $(4+m)(-3)-2-m.6-19+15m=0 \Leftrightarrow m=\frac{11}{2}$.

Thay $m=\frac{11}{2}$ vào (1) được(P): $19x+y-11z+123=0$.

Chú ý. Bạn đọc nên thực hiện thêm cách viết phương trình tổng quát của (P) bằng phương pháp tích hỗn tạp, theo các bước sau:

Bước 1: Xác định các vtcp $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự của (d_1) và (d_2).

Bước 2: Điểm M(x, y, x)$\in$(P) $\Leftrightarrow$ $D(\overrightarrow{IM}, \vec{a}_1, \vec{a}_2)=0$.

Từ đó suy ra phương trình tổng quát của (P).

Bài 5 (ĐHKTQD-97): Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình

$$(d_1): \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}, (d_2): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, (t \in R).$$

a. CMR hai đường thẳng đó cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm I của chúng.

b. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

BÀI GIẢI

a. Thay x, y, z ở phương trình của (d_2) vào (d_1), ta được:

$$\frac{-1+t-1}{-2} = \frac{-t+2}{1} = \frac{-2+3t-4}{3} \Rightarrow t=2.$$

Thay t=2 vào phương trình (d_2), ta được I(1, -2, 4).

Vậy $(d_1) \cap (d_2)$=I(1, -2, 4).

b. Ta có:

Cách 1.

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(-2, 1, 3)$, $\vec{a}_2(1, -1, 3)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của mặt phẳng (P), khi đó:

$$\begin{cases} \vec{n}\perp\vec{a}_1 \\ \vec{n}\perp\vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}(6, 9, 1).$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) được xác định bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } I(1,-2,4) \\ \text{vtpt } \vec{n}(6,9,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 6(x-1)+9(y+2)+1(z-4)=0 \Leftrightarrow (P): 6x+9y+z+8=0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của (P).

Chú ý. Thay vì phải trình bày như cách 1, ta có thể sử dụng ngay tích hỗn tạp để có được phương trình tổng quát của (P), như sau:

Điểm $M(x, y, x)\in(P) \Leftrightarrow D(\overrightarrow{IM}, \vec{a}_1, \vec{a}_2)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}(x-1) + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}(y+2) + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}(z-4) = 0$$

$\Leftrightarrow$ (P): $6x+9y+z+8=0$

Đó chính là phương trình tổng quát của (P).

Cách 2. Chuyển phương trình (d_1) về dạng tổng quát, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} \\ \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{z-4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3=0 \\ 3x+2z-11=0 \end{cases}.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của đường thẳng (d_1).

Chọn A(-1, 0, -2), nhận thấy:

$$\begin{cases} A\notin(d_1) \\ A\in(d_2) \end{cases}.$$

Vậy, (P) đi qua hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

$$\Leftrightarrow (P): \begin{cases} (d_1)\subset(P) \\ A\in(P) \end{cases}.$$

Đường thẳng $(d_1)\subset(P) \Rightarrow$ (P) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d) có dạng:

(P): $x+2y+3+m(3x+2z-11)=0$

$\Leftrightarrow$ (P): $(1+3m)x+2y+2mz+3-11m=0$ (1)

Điểm $A(-1, 0, -2)\in(P) \Leftrightarrow (1+3m)(-1)+2.0+2m(-2)+3-11m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{9}$.

Thay $m=\dfrac{1}{9}$ vào (1) được (P): $6x+9y+z+8=0$.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. (ĐHBK TP.HCM - 93): Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2), biết:

$$(d_1): \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2}, \ (d_2): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2}$$

Bài tập 2. (ĐHSP II - 2000): Cho điểm A(1, -1, 1) và hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình là:

$$(d_1): \begin{cases} 3x - y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}, \ (d_2): \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3t \end{cases}, (t \in R).$$

CMR (d_1), (d_2) và điểm A cùng thuộc một mặt phẳng.

Bài tập 3. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình là:

$$(d_1): \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}, \ (d_2): \begin{cases} 3x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}.$$

a. CMR hai đường thẳng đó cắt nhau.
b. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2).
c. Viết phương trình đường phân giác của (d_1), (d_2).

Bài tập 4. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình là:

$$(d_1): \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}, \ (d_2): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases}, (t \in R).$$

a. CMR (d_1) và (d_2) cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm I của chúng.
b. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2).
c. Viết phương trình đường phân giác của (d_1), (d_2).

Bài tập 5. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình là:

$$(d_1): \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{3}, \ (d_2): \begin{cases} 4x - y - 2 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}.$$

a. CMR (d_1) và (d_2) song song với nhau
b. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2).
c. Viết phương trình đường thẳng (d) trong (P) song song và cách đều (d_1), (d_2).

CHỦ ĐỀ 6

HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Ta biết rằng trong không gian hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng.

Bài toán 1: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2). CMR (d_1) và (d_2) chéo nhau.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng tích hỗn tạp.

Cách 2: Thực hiện theo hai bước

Bước 1: Chứng minh hệ phương trình tạo bởi hai đường thẳng đó vô nghiệm.

Bước 2: Chứng minh hai vtcp của (d_1) và (d_2) không cùng phương.

Ví dụ 1: Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} x = 6 + 3t_1 \\ y = -1 - 2t_1 \\ z = -2 + t_1 \end{cases} \quad (t, t_1 \in R).$$

Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.

Giải.

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp (d_1) và (d_2), ta được

$\vec{a}_1(2, 1, 4)$, $\vec{a}_2(3, -2, 1)$.

Cách 1. Sử dụng tích hỗn tạp

Lấy $A(1,0,0) \in (d_1)$ và $B(6,-1,-2) \in (d_2)$ (lưu ý $A \neq B$), suy ra $\overrightarrow{AB}(5,-1,-2)$

Xét tích hỗn tạp của ba vectơ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{AB}$ là:

$$D(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{AB}) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Leftrightarrow$ (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Cách 2. Thiết lập hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2), ta có:

$$\begin{cases} 1 + 2t = 6 + 3t_1 \\ 2t = -1 - 2t_1 \\ t = -2 + t_1 \end{cases} \qquad (*)$$

Hệ (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (d_1) và (d_2) không có điểm chung.

Mặt khác $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ không cùng phương.

Vậy (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình :

$$(d_1): \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 & (1) \\ y + z - 1 = 0 & (2) \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} x - 2y - 2z + 9 = 0 & (3) \\ y - z + 1 = 0 & (4) \end{cases}.$$

CMR (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Giải.

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (4), ta được : x=2, y=0, z=1.

Thay x, y, z vào (4), ta được:

2-2.0-2.1+9=0 mâu thuẫn.

Vậy (d_1) và (d_2) không có điểm chung.

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là một vtcp của đường thẳng (d_1) và (d_2), ta có:

$$\vec{a}_1\left(\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix}\right) = \vec{a}_1(0, -1, 1)$$

$$\vec{a}_2\left(\begin{vmatrix}-2 & -2\\1 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-2 & 1\\-1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{vmatrix}\right) = \vec{a}_2(4, 1, 1)$$

$\Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2$ không cùng phương.

Kết kuận: hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

2. ĐƯỜNG VUÔNG GÓC CHUNG CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Ta biết rằng (d) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (d) \cap (d_1) \equiv A \ \& \ (d) \perp (d_1) \\ (d) \cap (d_2) \equiv B \ \& \ (d) \perp (d_2) \end{cases}.$$

Bài toán 2: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường đó.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong các phương pháp sau:

Phương pháp 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là một vtcp của đường thẳng (d_1) và (d_2).

Gọi $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d), suy ra:

$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases}$, từ đây ta xác định được $\vec{a}$.

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (P_1) chứa (d) và (d_1).

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (P_2) chứa (d) và (d_2).

Bước 4 :Phương trình (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2).

*Phương pháp 2 (*Nếu (d_1) và (d_2) đều cho dưới dạng tham số*)*: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi AB là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2) $(A \in (d_1);\ B \in (d))$. Khi đó, toạ độ của A, B theo thứ tự thoả mãn phương trình tham số của (d_1) và (d_2). Từ đó suy ra toạ độ $\overrightarrow{AB}$.

Bước 2: Từ điều kiện

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp (d_1) \\ \overrightarrow{AB} \perp (d_2) \end{cases},$$

ta xác định được toạ độ điểm A, B.

Bước 3: Khi đó (AB) chính là phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

*Phương pháp 3 (*Nếu (d_1), (d_2) chéo nhau và vuông góc với nhau*)*: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng mặt phẳng (P_1) thoả mãn :

$$\begin{cases} (d_1) \subset (P_1) \\ (P_1) \perp (d_2) \end{cases}.$$

Bước 2: Dựng mặt phẳng (P_2) thoả mãn :

$$\begin{cases} (d_2) \subset (P_2) \\ (P_2) \perp (d_1) \end{cases}.$$

Bước 3: Phương trình (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2).

Ví dụ 3: Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình :

$$(d_1): \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x - 2y - 2z + 9 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1), (d_2).

Giải.

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là một vtcp của đường thẳng (d_1) và (d_2), ta có:

$$\vec{a}_1\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_1(0, -1, 1);$$

$$\vec{a}_2\left(\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_2(4, 1, 1).$$

Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2), khi đó một vtcp $\vec{a}$ của (d) thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{a}\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}(-2, 4, 4), \text{ chọn } \vec{a}(-1, 2, 2).$$

Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1). khi đó (P_1) có một vtpt $\vec{n}_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \perp \vec{a} \\ \vec{n}_1 \perp \vec{a}_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}_1(-4, -1, -1).$$

Khi đó phương trình mặt phẳng (P_1) được xác định bởi:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } A(2,1,0) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1(-4,-1,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): -4(x-2)-1(y-1)-z=0 \Leftrightarrow (P_1): 4x+y+z-9=0.$$

Gọi (P_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2). khi đó (P_2) có một vtpt $\vec{n}_2$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \perp \vec{a} \\ \vec{n}_2 \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_2\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}_2(0, -9, 9) \text{ chọn } \vec{n}_2(0, -1, 1).$$

Khi đó phương trình mặt phẳng (P_2) được xác định bởi:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } B(-3,2,1) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1(0,-1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): -1.(y-2)+1.(z-1)=0 \Leftrightarrow (P_2): y-z-1=0.$$

Ta có (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), có dạng:

$$(d): \begin{cases} -4x - y - z + 9 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 4: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình là:

$$(d_1): \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, (t \in R) \quad (d_2): \begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ 5x + 2z - 12 = 0 \end{cases}.$$

Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1), (d_2).

Giải.

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là một vtcp của đường thẳng (d_1) và (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(3, -2, -1)$;

$$\vec{a}_2\left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_2(-4, -6, 10) \text{ chọn } \vec{a}_2(2, 3, -5).$$

Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2), khi đó một vtcp $\vec{a}$ của (d) thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{a}\left(\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}(13, 13, 13), \text{ chọn } \vec{a}(1, 1, 1).$$

Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1). khi đó (P_1) có một vtpt $\vec{n}_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \perp \vec{a} \\ \vec{n}_1 \perp \vec{a}_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}_1(1, 4, -5).$$

Khi đó, lấy một điểm $A(-1, -3, 2) \in (d_1)$ thì phương trình mặt phẳng (P_1) được xác định bởi:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } A(-1,-3,2) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1(1,4,-5) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): x+4y-5z+3=0.$$

Gọi (P_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2). khi đó (P_2) có một vtpt $\vec{n}_2$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \perp \vec{a} \\ \vec{n}_2 \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_2\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}_2(-8, 7, 1).$$

Khi đó , lấy một điểm $B(0, -4, 6) \in (d_2)$ thì phương trình mặt phẳng (P_2) được xác định bởi:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } B(0,-4,6) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1(-8,7,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): -8x+7y+z+22=0.$$

Ta có (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2), có dạng:

$$(d): \begin{cases} x + 4y - 5z + 3 = 0 \\ -8x + 7y + z + 38 = 0 \end{cases}.$$

Chú ý. Cũng có thể xác định phương trình mặt phẳng (P_2) bằng cách:

Mặt phẳng (P_2) chứa (d_2) => (P_2) thuộc chùm tạo bởi (d_2), có dạng:

(P_2): $5x+2z-12+m(3x-2y-8)=0$

$\Leftrightarrow (P_2)$: $(5+3m)x-2my+2z-12-8m=0$. (1)

khi đó (P_2) có một vtpt $\vec{n}_2(5+3m, -2m, 2)$.

Mặt phẳng (P_2) chứa (d) $\Rightarrow \vec{n}_2 \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{n}_2.\vec{a}=0 \Leftrightarrow 5+3m-2m+2=0 \Leftrightarrow m=-7$

Thay m=-7 vào (1), được (P_2): $-8x+7y+z+22=0$.

Ví dụ 5: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = u + 2 \\ y = -3 + 2u \\ z = 3u + 1 \end{cases}, (t, u \in R).$$

Viết phương trình đường thẳng vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

Giải.

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có: $\vec{a}_1(2, 1, 3)$, $\vec{a}_2(1, 2, 3)$.

Gọi AB là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2) ($A \in (d_1)$; $B \in (d)$). Khi đó, toạ độ của A, B theo thứ tự thoả mãn phương trình tham số của (d_1) và (d_2), tức là: A(2t+1, t+2, 3t-3); B(u+2, 2u-3, 3u+1) $\Rightarrow \overrightarrow{AB}$(u-2t+1, 2u-t-5, 3u-3t+4).

Từ điều kiện

$$\begin{cases} AB \perp (d_1) \\ AB \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{a}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{a}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(u - 2t + 1) + 2u - t - 5 + 3(3u - 3t + 4) = 0 \\ u - 2t + 1 + 2(2u - t - 5) + 3(3u - 3t + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{29}{9} \\ u = \dfrac{25}{9} \end{cases}.$$

- Thay $t=\dfrac{29}{9}$ vào phương trình của (d_1) ta được $A(\dfrac{67}{9}, \dfrac{47}{9}, \dfrac{20}{3})$.
- Thay $u=\dfrac{25}{9}$ vào phương trình của (d_1) ta được $B(\dfrac{43}{9}, \dfrac{23}{9}, \dfrac{84}{9})$.

Khi đó, phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) chính là phương trình (AB), được xác định bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(\dfrac{67}{9}, \dfrac{47}{9}, \dfrac{20}{3}) \\ \text{vtcp } \overline{AB}(-\dfrac{24}{9}, -\dfrac{24}{9}, \dfrac{24}{9}) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \begin{cases} x = \dfrac{67}{9} + t \\ y = \dfrac{47}{9} + t \\ z = \dfrac{20}{3} - t \end{cases}, t \in R.$$

Đó chính là phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

3. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Ta biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài của đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Bài toán 3: Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong các phương pháp sau:

Phương pháp 1: Nếu biết đoạn vuông góc chung AB $\Rightarrow$ AB=d((d_1), (d_2)).

Phương pháp 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và song song với (d_2).

Bước 2: Lấy điểm $A\in(d_1)$. Khi đó:

$$d((d_1), (d_2))=d(A, (P)).$$

Phương pháp 3: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm vtcp $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ của đường thẳng (d_1) và một điểm $A(x_1, y_1, z_1)\in(d_1)$.

Bước 2: Tìm vtcp $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ của đường thẳng (d_2) và một điểm $B(x_2, y_2, z_2)\in(d2)$.

Bước 3: Khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) được xác định bởi công thức:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{|[\vec{a}, \vec{b}].\overrightarrow{BA}|}{|[\vec{a}, \vec{b}]|}$$

Ví dụ 6: Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình :

$$(d_1): \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases};\ (d_2): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases},\ t\in R.$$

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Giải.

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là một vtcp của đường thẳng (d_1) và (d_2), ta có:

$$\vec{a}_1\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_1(1, -1, -2),$$

$\vec{a}_2(3, -1, 1)$.

Lấy $A(2, -2, 0)\in(d_1)$ và $B(1, 0, 2)\in(d_2)$.

Khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) được xác định bởi:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{|[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}].\overrightarrow{AB}|}{|[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}]|} = \frac{7}{\sqrt{62}}.$$

Ví dụ 7 (ĐHKTQD-98): Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

$$(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}\quad (d_2): \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

Giải.

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1), (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(1, 2, 3)$ và $\vec{a}_2(-1, 1, 1)$.

Cách 1.

Lấy $M(1, 2, 3)\in(d_1)$ và $N(2, -1, 0)\in(d_2)$.

Khi đó khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) được xác định bởi công thức:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{|[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}].\overrightarrow{AB}|}{|[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}]|} = \frac{2}{\sqrt{26}}.$$

Cách 2.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa (d_2) và song song với (d_1). Ta có:

- (P) là mặt phẳng chứa (d_2) ⇒ thuộc chùm tạo bởi (d_2) có dạng:

$$(P): 2x-y+3z-5+m(x+2y-z)=0$$

$$\Leftrightarrow (P): (2+m)x+(2m-1)y+(3-m)z-5=0 \qquad (1)$$

có vtpt $\vec{n}$ (2+m, 2m-1, 3-m).

- $(P)//(d_1) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{a}_1=0$

$$\Leftrightarrow 1.(2+m)+2.(2m-1)y+3.(3-m)=0 \Leftrightarrow m=-\frac{9}{2}$$

Vậy (P): x+4y-3z+2=0.

Lấy điểm $A(1, 2, 3)\in(d_1)$. Khi đó:

$$d((d_1), (d_2))=d(A, (P))=\frac{|1+4.2-3.3+2|}{\sqrt{1+16+9}}=\frac{2}{\sqrt{26}}.$$

Ví dụ 8: (ĐHTM-97): Cho hai đường thẳng chéo nhau (d_1) và (d_2) có dạng:

$$(d_1): \begin{cases} x=1 \\ y=-4+2t \\ z=3+t \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x=-3u \\ y=3+2u \\ z=-2 \end{cases}, (t, u\in R).$$

a. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

b. Viết phương trình đường thẳng vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

Giải.

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có: $\vec{a}_1(0, 2, 1)$, $\vec{a}_2(-3, 2, 0)$.

Gọi AB là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2) $(A\in(d_1); B\in(d_2))$. Khi đó, toạ độ của A, B theo thứ tự thoả mãn phương trình tham số của (d_1) và (d_2), tức là:

$$A(1, 2t-4, t+3); B(-3u, 2u+3, -2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-3u-1, 2u-2t+7, -t-5).$$

Từ điều kiện

$$\begin{cases} AB\perp(d_1) \\ AB\perp(d_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{a}_1=0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{a}_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ u=-1 \end{cases}.$$

Ta xác định được toạ độ điểm A(1, -2, 4), B(3, 1, -2). Khi đó:

a. Khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) chính là độ dài đoạn AB, được cho bởi:

$$d((d_1), (d_2))=AB=\sqrt{(1-3)^2+(-2-1)^2+(4+2)^2}=7.$$

b. Phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) chính là phương trình (AB), được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(1,-2,4) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(2,3,-6) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+3t \\ z=4-6t \end{cases}, t\in R.$$

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (ĐHNN I - 94): Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình là:

$$(d_1): \begin{cases} x + 8z + 23 = 0 & (1) \\ y - 4z + 10 = 0 & (2) \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 & (3) \\ y + 2z + 2 = 0 & (4) \end{cases}.$$

a. Chứng tỏ rằng (d_1) và (d_2) chéo nhau.
b. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).
c. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1), mặt phẳng (Q) chứa (d_2) sao cho (P)//(Q).
d. Viết phương trình đường thẳng (d) song song với Oz và cắt cả hai (d_1) và (d_2).

BÀI GIẢI

a. Ta đi chứng minh $(d_1)\cap(d_2)= \varnothing$.

Xét hệ tạo bởi (2), (3), (4):

$$\begin{cases} y - 4z + 10 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{17}{3}, y=-\frac{14}{3}, z=\frac{4}{3}.$$

Thay x,y,z vào (1) thấy mâu thuẫn.

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có:

$$\vec{a}_1\left(\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_1(-8, 4, 1)$$

$$\vec{a}_2\left(\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_2(2, -2, 1)$$

$\Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2$ không cùng phương.

Vậy (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

Lấy $A(-23, -10, 0)\in(d_1)$ và $B(3, -2, 0)\in(d_2)$.

Khi đó khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) được xác định bởi công thức:

$$d((d_1),(d_2))= \frac{|[\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}].\overrightarrow{AB}|}{|[\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}]|} = \frac{118}{5\sqrt{2}}.$$

c. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

- Phương trình mặt phẳng (P)

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(-23,-10,0) \\ \text{hai vtcp } \vec{a}_1 \ \& \ \overrightarrow{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A(-23,-10,0) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\vec{a}_1, \overrightarrow{a_2}] = (3,5,4) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $3x+5y+4z+119=0$.

- Phương trình mặt phẳng (Q)

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } B(3,-2,0) \\ \text{hai vtcp } \vec{a}_1 \ \& \ \overrightarrow{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } B(3,-2,0) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\vec{a}_1, \overrightarrow{a_2}] = (3,5,4) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (Q): $3x+5y+4z-1=0$..

Cách 2: (P) chứa $(d_1) \Rightarrow$ (P) thuộc chùm tạo bởi trục (d_1) có dạng

(P): $x+8z+23+m(y-4z+10)=0$

$\Leftrightarrow$ (P): $x+my+4(2-m)z+23+10m=0$ (1)

khi đó (P) có vtpt $\vec{n}_1(1, m, 4(2-m))$.

(Q chứa (d_2) ⇒ (Q) thuộc chùm tạo bởi trục (d_2) có dạng
$(Q): x-2z-3+n(y+2z+2)=0 \Leftrightarrow (Q): x+ny+2(n-1)z-3+2n=0$ (2)
khi đó (Q) có vtpt $\vec{n}_2(1, n, 2(n-1))$.
Vì $(P)//(Q) \Rightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{1}{1} = \frac{m}{n} = \frac{4(2-m)}{2(n-1)} \Rightarrow m=n=\frac{5}{3}$

Thay $m=\frac{5}{3}$ vào (1), được $(P): 3x+5y+4z+119=0$.

Thay $n=\frac{5}{3}$ vào (2), được $(Q): 3x+5y+4z-1=0$.

d. Ta có:

- *Gọi (R_1) là mặt phẳng chứa (d_1) và song song với Oz.*
  (R_1) chứa (d_1) ⇒ (R_1) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d_1) có dạng
  $(R_1): x+8z+23+a(y-4z+10)=0 \Leftrightarrow (R_1): x+ay+4(2-a)z+23+10a=0$ (3)
  khi đó (R_1) có vtpt $\vec{n}_3(1, a, 4(2-a))$.
  Vì $(R_1)//Oz \Leftrightarrow \vec{n}_3 \perp Oz \Leftrightarrow 4(2-a)=0 \Leftrightarrow a=2$.
  Thay a=2 vào (3), được $(R_1): x+2y+43 = 0$.
- *Gọi (R_2) là mặt phẳng chứa (d_2) và song song với Oz.*
  (R_2) chứa (d_2) ⇒ (R_2) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d_2) có dạng
  $(R_2): x-2z-3+b(y+2z+2)=0 \Leftrightarrow (R_2): x+by+2(-1+b)z-3+2b=0$ (4)
  khi đó (R_2) có vtpt $\vec{n}_4(1, b, 2(1+b))$.
  Vì $(R_2)//Oz \Leftrightarrow \vec{n}_4 \perp Oz \Leftrightarrow 2(1+b)=0 \Leftrightarrow b=1$.
  Thay b=-1 vào (4), được $(R_2): x+y-1 = 0$.
  Gọi (d) là giao tuyến của (R_1) và (R_2), (d) có dạng:
  $$\begin{cases} x + 2y + 43 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}.$$
  Khi đó, (d) chính là đường thẳng song song với Oz và cắt (d_1) và (d_2).

Bài 2 (ĐHQG-94): Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = u + 2 \\ y = -3 + 2u \\ z = 3u + 1 \end{cases}, (t, u \in R).$$

a. CMR hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.
b. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).
c. Viết phương trình đường thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

BÀI GIẢI

a. CMR hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Cách 1. Chứng minh (d_1) và (d_2) không có điểm chung: xét hệ tạo bởi (d_1),(d_2):

$$\begin{cases} 2t + 1 = u + 2 \quad (1) \\ t + 2 = -3 + 2u \quad (2) \\ 3t - 3 = 3u + 1 \quad (3) \end{cases}, \text{ từ (1),(3)} \Rightarrow \begin{cases} t = -1/3 \\ u = -5/3 \end{cases}, \text{ thay vào (2) thấy MT.}$$

Vậy $(d_1) \cap (d_2) = \varnothing$.
Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có: $\vec{a}_1(2, 1, 3)$, $\vec{a}_2(1, 2, 3)$.
Vậy $\vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$ không cùng phương.
Kết kuận: hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Cách 2: Sử dụng tích hỗn tạp.

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có: $\vec{a}_1(2, 1, 3)$, $\vec{a}_2(1, 2, 3)$.

Lấy $A(1, 2, -3)\in(d_1)$ và $B(2, -3, 1)\in(d_2)$.

Xét tích hỗn tạp của ba vectơ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{AB}(1, -5, 4)$ là:

$$D(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0.$$

Kết kuận: hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Lấy $A(1, 2, -3)\in(d_1)$ và $B(2, -3, 1)\in(d_2)$.

Khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) được xác định bởi công thức:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2].\overrightarrow{AB}|}{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|} = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

c. Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2), khi đó một vtcp $\vec{a}$ của (d) thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{a}\perp\vec{a}_1 \\ \vec{a}\perp\vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{a}\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}(-3, -3, 3).$$

Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1). khi đó (P_1) có một vtpt $\vec{n}_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{n}_1\perp\vec{a} \\ \vec{n}_1\perp\vec{a}_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}_1(4, -5, -1).$$

Khi đó phương trình mặt phẳng (P_1) được xác định bởi:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } A(1,2,-3) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1(4,-5,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): 4(x-1)-5(y-2)-1(z+3)=0 \Leftrightarrow (P_1): 4x-5y-z+3=0$$

Gọi (P_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2). khi đó (P_2) có một vtpt $\vec{n}_2$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{n}_2\perp\vec{a} \\ \vec{n}_2\perp\vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_2\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}_2(5, -4, 1).$$

Khi đó phương trình mặt phẳng (P_2) được xác định bởi:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } B(2,-3,1) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1(5,-4,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): 5(x-2)-4(y+3)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow (P_2): 5x-4y+z-23=0$$

Phương trình (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2), có dạng:

$$\begin{cases} 4x - 5y - z + 3 = 0 \\ 5x - 4y + z - 23 = 0 \end{cases}.$$

Đó chính là phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

Chú ý. Để thực hiện câu 2, 3 của bài toán loại này ta nên sử dụng cách sau:

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có: $\vec{a}_1(2, 1, 3)$, $\vec{a}_2(1, 2, 3)$.

Gọi AB là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2) $(A\in(d_1);\ B\in(d))$. Khi đó, toạ độ của A, B theo thứ tự thoả mãn phương trình tham số của (d_1) và (d_2), tức là: $A(2t+1, t+2, 3t-3)$; $B(u+2, 2u-3, 3u+1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(u-2t+1, 2u-t-5, 3u-3t+4)$.

Từ điều kiện

$$\begin{cases} AB\perp(d_1) \\ AB\perp(d_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{a}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{a}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(u-2t+1)+2u-t-5+3(3u-3t+4)=0 \\ u-2t+1+2(2u-t-5)+3(3u-3t+4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=29/9 \\ u=25/9 \end{cases}.$$

Ta xác định được toạ độ điểm $A(\frac{67}{9}, \frac{47}{9}, \frac{20}{3})$, $B(\frac{43}{9}, \frac{23}{9}, \frac{84}{9})$. Khi đó:

Khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) chính là độ dài đoạn AB, được cho bởi:

$$d((d_1), (d_2)) = AB = \sqrt{(\frac{67}{9}-\frac{43}{9})^2+(\frac{47}{9}-\frac{23}{9})^2+(\frac{20}{3}-\frac{84}{9})^2} = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) chính là phương trình (AB), được xác định bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(\frac{67}{9}, \frac{47}{9}, \frac{20}{3}) \\ \text{vtcp } \overline{AB}(-\frac{24}{9}, -\frac{24}{9}, \frac{24}{9}) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \begin{cases} x = 67/9 + t \\ y = 47/9 + t \\ z = 20/3 - t \end{cases}, t \in R.$$

Đó chính là phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

Bài 3 (ĐHHH-96): Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x - y + 1 = 0 & (1) \\ 2x + z - 2 = 0 & (2) \end{cases}, (d_2): \begin{cases} 4x - y + 3 = 0 & (3) \\ 2y - 3z - 4 = 0 & (4) \end{cases}.$$

a. CMR hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau
b. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).
c. Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

BÀI GIẢI

a. CMR hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Cách 1. Chứng minh (d_1) và (d_2) không có điểm chung.

Xét hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3):

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + z - 2 = 0 \\ 4x - y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{2}{3};\ y = \frac{1}{3};\ z = \frac{10}{3}, \text{ thay vào (4) thấy MT} \Rightarrow (d_1) \cap (d_2) = \varnothing$$

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là một vtcp của đường thẳng (d_1) và (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(-1, -1, 2)$ và $\vec{a}_2(3, 12, 8) \Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2$ không cùng phương.

Kết kuận: hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Cách 2. Sử dụng tích hỗn tạp (bạn đọc tự giải).

b. Lấy $A(0, 1, 2) \in (d_1)$ và $B(-1, -1, -2) \in (d_2)$.

Khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) được xác định bởi công thức:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{|[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}].\overrightarrow{AB}|}{|[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}]|} = \frac{40}{\sqrt{1301}}.$$

c. Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2), khi đó một vtcp $\vec{a}$ của (d) thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{a}\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 12 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}(-32, 14, -9).$$

Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1). khi đó (P_1) có một vtpt $\vec{n}_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \perp \vec{a} \\ \vec{n}_1 \perp \vec{a}_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1\left(\begin{vmatrix} 14 & -9 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -9 & -32 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -32 & 14 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}_1(19, 73, 46).$$

Khi đó phương trình mặt phẳng (P_1) được xác định bởi:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } A(0,1,2) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1(19,73,46) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): 19x+73y+46z-165=0.$$

Gọi (P_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2). khi đó (P_2) có một vtpt $\vec{n}_2$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \perp \vec{a} \\ \vec{n}_2 \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_2\left(\begin{vmatrix} 14 & -9 \\ 12 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -9 & -32 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -32 & 14 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}_2\,(240, 229, -436).$$

Khi đó phương trình mặt phẳng (P_2) được xác định bởi:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } B(-1,-1,-2) \\ \text{vtpt } \vec{n}_2(240,229,-436) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): 240x+229y-436z+33=0.$$

Phương trình (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2), có dạng:

$$(d): \begin{cases} 19x + 73y + 46z - 165 = 0 \\ 240x + 229y - 436z + 333 = 0 \end{cases}.$$

Bài 4 (ĐH Huế/A hệ phân ban-97): Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x - 2y - 2z + 9 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) vuông góc với nhau.

b. Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

BÀI GIẢI

a. *Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) vuông góc với nhau.*

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là một vtcp của đường thẳng (d_1) và (d_2), ta có:

$$\vec{a}_1\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_1(0, -1, 1),$$

$$\vec{a}_2\left(\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_2(4, 1, 1)$$

Xét $\vec{a}_1.\vec{a}_2 = 0.4-1.1+1.1=0$, vậy (d_1) và (d_2) vuông góc với nhau.

b. *Viết phương trình đường thẳng vuông góc chung của (d_1) và (d_2).*

Cách 1.

Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2), khi đó một vtcp $\vec{a}$ của (d) thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{a}\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}\,(-2, 4, 4), \text{ chọn } \vec{a}\,(-1, 2, 2).$$

Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1). khi đó (P_1) có một vtpt $\vec{n}_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \perp \vec{a}_1 \\ \vec{n}_1 \perp \vec{a} \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}_1\,(-4, -1, -1) \text{ chọn } \vec{n}_1\,(4, 1, 1)$$

Khi đó phương trình mặt phẳng (P_1) được xác định bởi:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } A(2,1,0) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1(4,1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): 4(x-2)+1(y-1)+z=0 \Leftrightarrow (P_1): 4x+y+z-9=0.$$

Gọi (P_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2). khi đó (P_2) có một vtpt $\vec{n}_2$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \perp \vec{a}_2 \\ \vec{n}_2 \perp \vec{a} \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_2\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}_2\,(0, -9, 9) \text{ chọn } \vec{n}_2\,(0, 1, -1).$$

Khi đó phương trình mặt phẳng (P_2) được xác định bởi

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } B(1,2,3) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1(0,1,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): 1(y-2)-1(z-3)=0 \Leftrightarrow (P_2): y-z+1=0.$$

Phương trình (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2), có dạng:

$$(d): \begin{cases} 4x + y + z - 9 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Cách 2. (Vì (d_1) và (d_2) chéo nhau và vuông góc với nhau).

- Dựng mặt phẳng (P_1)

$$(P_1): \begin{cases} (d_1) \subset (P_1) \\ (P_1) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{đi qua } A(2,1,0) \in (d_1) \\ \text{vtpt } \vec{a}_2(4,1,1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P_1): 4(x-2)+1.(y-1)+1.z=0 \Leftrightarrow (P_1): 4x+y+z-9=0.$

- Dựng mặt phẳng (P_2)

$$(P_2): \begin{cases} (d_2) \subset (P_2) \\ (P_2) \perp (d_1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases} \text{đi qua } B(1,2,3) \in (d_1) \\ \text{vtpt } \vec{a}_1(0,-1,1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P_2): 0.(x-1)-1.(y-2)+1.(z-3)=0 \Leftrightarrow (P_2): y-z+1=0.$

- Đường vuông góc vhung (d) của (d_1) và (d_2) chính là giao tuyến của (P_1) va (P_2), do đó có phương trình:

$$\begin{cases} 4x + y + z - 9 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Chú ý: Cũng có thể xác định được phương trình của các mặt phẳng (P_1) và (P_2) bằng việc sử dụng chùm mặt phẳng. Cụ thể:

- Dựng mặt phẳng (P_1)

Vì (P_1) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi trục (d_1), có dạng:

$(P_1): \lambda(x+y+z-3)+ \mu(y+z-1)=0$

$\Leftrightarrow (P_1): \lambda x+(\mu+\lambda)y+(\mu+\lambda)z-3\lambda-\mu=0$ (1)

khi đó (P_1) có vtpt $\vec{n}_1(\lambda, \mu+\lambda, \mu+\lambda)$.

Vì $(P_1)\perp(d_2)$

$$\Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{a}_2=0 \Leftrightarrow \frac{4}{\lambda} = \frac{1}{\mu+\lambda} = \frac{1}{\mu+\lambda} \Leftrightarrow \mu=-\frac{3}{4}\lambda.$$

Thay $\mu=-\frac{3}{4}\lambda$ vào (1), được

$$(P_1): \lambda(x+y+z-3) - \frac{3}{4}\lambda (y+z-1)=0 \Leftrightarrow (P_1): 4x+y+z-9=0.$$

- Dựng mặt phẳng (P_2)

Vì (P_2) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi trục (d_2), có dạng:

$(P_2): \lambda(x-2y-2z+9)+ \mu (y-z+1)=0$

$\Leftrightarrow (P_2): 2\lambda x+(\mu-2\lambda)y+(-\mu-\lambda)z+9\lambda+\mu=0$ (2)

khi đó (P_2) có vtpt $\vec{n}_2(2\lambda, \mu-2\lambda, -\mu-\lambda)$.

Vì $(P_2)\perp(d_1)$

$$\Leftrightarrow \vec{n}_2 // \vec{a}_1=0 \Leftrightarrow \frac{0}{2\lambda} = \frac{-1}{\mu-2\lambda} = \frac{1}{-\mu-\lambda} \Leftrightarrow \lambda=0.$$

Thay $\lambda=0$ vào (2), được

$(P_2): \mu (y-z+1)=0 \Leftrightarrow (P_2): y-z+1=0.$

Bài 5 (ĐHSP II/ A-98): Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình là:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, (t \in R); \quad (d_2): \begin{cases} x + 2z - 2 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}.$$

a. CMR (d_1) và (d_2) chéo nhau.
b. Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).
c. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng cách đều (d_1) và (d_2).

BÀI GIẢI

a. Thay x, y, z của (d_1) vào (d_2) ta được:

$$\begin{cases} 2 + t + 2.2t - 2 = 0 \\ 1 - t - 3 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm} \Rightarrow (d_1) \cap (d_2) = \varnothing.$$

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là một vtcp của đường thẳng (d_1) và (d_2), ta có:

$$\vec{a}_1(1, -1, 2) \text{ và } \vec{a}_2\left(\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_2(-2, 0, 1).$$

$\Rightarrow \vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$ không cùng phương.

Vậy hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. *Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).*

Chuyển phương trình (d_2) về dạng tham số:

Chọn $E(2, 3, 0) \in (d_2)$. Khi đó:

$$(d_2): \begin{cases} \text{qua } E(2,3,0) \\ \text{vtcp } a_2(-2,0,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x = 2 - 2u \\ y = 3 \\ z = u \end{cases}, (u \in R).$$

Gọi AB là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2) $(A \in (d_1);\ B \in (d))$. Khi đó, toạ độ của A, B theo thứ tự thoả mãn phương trình tham số của (d_1) và (d_2), tức là: $A(2+t, 1-t, 2t)$; $B(2-2u, 3, u) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-2u-t, 2+t, u-2t)$.

Từ điều kiện

$$\begin{cases} AB \perp (d_1) \\ AB \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{a}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{a}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ u = 0 \end{cases} \Rightarrow A(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}),\ B(2, 3, 0).$$

Khi đó, phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) chính là phương trình (AB), được xác định bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } B(2,3,0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \begin{cases} x = 2 + v \\ y = 3 + 5v \\ z = 2u \end{cases}, (v \in R).$$

c. Gọi I là trung điểm AB, khi đó: $I(\frac{11}{6}, \frac{13}{6}, -\frac{1}{3})$.

Goi (Q) là mặt phẳng cách đều (d_1) và (d_2), khi đó:

$$(Q): \begin{cases} I \in (Q) \\ (Q)//(d_1) \\ (Q)//(d_2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } I(\frac{11}{6}, \frac{13}{6}, -\frac{1}{3}) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB}(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } I(\frac{11}{6}, \frac{13}{6}, -\frac{1}{3}) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB}(6,30,12) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (Q): $x+5y+2z-72=0$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. (ĐHNN-96): Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình

$$(d_1): \begin{cases} x = -7 + 3t \\ y = 4 - 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = -9 + 2t_1 \\ z = -12 - t_1 \end{cases} \quad (t, t_1 \in R).$$

a. CMR hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.

b. Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

Bài tập 2. (ĐHTCKT-96): Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng

(d_1): $x=-y+1=z-1$, (d_2): $-x+1=y-1=z$.

Tìm toạ độ điểm A_1 thuộc (d_1) và toạ độ điểm A_2 thuộc (d_2) để đường thẳng A_1A_2 vuông góc với (d_1) và vuông góc với (d_2).

Bài tập 3. (PVBC&TT TPHCM-99): Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình :

$$(d_1): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{1} \quad (d_2): \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{5} = \frac{z}{-2}.$$

a. CMR hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

Bài tập 4. (ĐHLN - 96): Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} x = 2t_1 \\ y = 1 + t_1 \\ z = t_1 \end{cases} \quad (t, t_1 \in R).$$

a. CMR hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P), (Q) song song với nhau và lần lượt chứa (d_1), (d_2).

b. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

Bài tập 5. (ĐHTS-99): Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình là:

$$(d_1): \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, (t \in R) \quad (d_2): \begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ 5x + 2z - 12 = 0 \end{cases}.$$

a. CMR (d_1) và (d_2) chéo nhau. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

b. Hãy viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

Bài tập 6. (ĐHSP Qui nhơn/D-99): Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có:

$$(d_1): \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases}; \quad (d_2): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in R.$$

a. CMR hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Bài tập 7. (ĐHY TPHCM/D -98): Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có:

$$(d_1): \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}, \quad (d_2): \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

a. CMR hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Viết phương trình đường vuông góc chung củ $d_1)$ và (d_2).

Bài tập 8. (ĐH Huế -98): Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2 + 2t_1 \\ y = -1 + t_1 \\ z = 1 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t_2 \\ z = 3 - t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in R).$$

a. CMR (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và song song với (d_2).

c. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Bài tập 9. (ĐHNN-97): Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình là:

$$(d_1): \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -5t \\ z = 2 + t \end{cases}, (t \in R).$$

a. CMR (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

c. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua M(1, 1, 1) và cắt đồng thời cả (d_1) và (d_2).

Bài tập 10. (ĐHKT 98): Cho tứ diện SABC với các đỉnh S(-2, 2, 4); A(-2, 2, 0); B(-5, 2, 0); C(-2, 1, 1). Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối SA và BC.

PHẦN III
ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

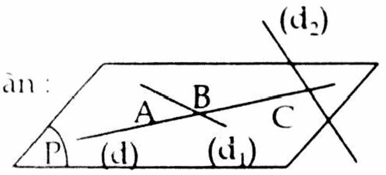
CHỦ ĐỀ 1
ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM CẮT CẢ HAI ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Viết phương trình đường thẳng qua A và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong ba cách sau:



Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P_1) thoả mãn :

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_1) \in (P_1) \end{cases}.$$

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (P_2) thoả mãn :

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_2) \in (P_2) \end{cases}.$$

Bước 3: Kết luận

Nếu $(P_1)\equiv(P_2)$. Kết luận: bài toán có vô số nghiệm.

Nếu $(P_1)\neq(P_2)$. Gọi (d) là giao tuyến của (P_1) và (P_2).

- Nếu:

$$\left[\begin{array}{l} (d)//(d_1) \\ (d)//(d_2) \end{array}\right..$$

Kết luận: bài toán vô nghiệm.

- Còn lại, kết luận: (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P) thoả mãn :

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_1) \in (P) \end{cases}.$$

Lưu ý. trong bước này ta nên chọn (d_1) có phương trình tổng quát hoặc được chuyển về dạng tổng quát một cách dễ dàng.

Bước 2: Xác định giao điểm C của (d_2) và (P).

- Nếu không tồn tại giao điểm. Kết luận bài toán vô nghiệm.
- Nếu có vô số giao điểm $((d_2)\in(P))$. Kết luận bài toán có vô số nghiệm đó chính là chùm đường thẳng trong (P) đi qua A.
- Nếu có nghiệm duy nhất thực hiện bước 3.

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (d) thoả mãn :

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

Cần kiểm chứng (d) không song song với (d_1) .

Cách 3: (được áp dụng trong trường hợp (d_1) và (d_2) cho dưới dạng tham số)

Bước 1: Giả sử đường thẳng (d) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại B, C. Khi đó toạ độ B, C theo thứ tự thoả mãn các phương trình tham số của (d_1) và (d_2).

Bước 2: Từ điều kiện A, B, C thẳng hàng ta xác định được toạ độ B, C.

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A và B.

Chú ý:

- Nếu bài toán yêu cầu viết phương trình tổng quát của (d), sử dụng cách 1.
- Nếu bài toán yêu cầu viết phương trình tham số hoặc chính tắc của đường thẳng (d), ta sử dụng cách 2 hoặc cách 3.

Ví dụ 1: Viết phương trình đường thẳng đi qua A(1, 1, 1) và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} x - 2y - 2z + 9 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Giải.

Cách 1. Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), trong đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_1) \subset (P) \end{cases} \text{ và } (Q): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_2) \subset (Q) \end{cases}.$$

- *Xác định phương trình mặt phẳng (P)*

(P) thuộc chùm tạo bởi (d_1), có dạng:

$$(P): x+y+z-3+m(y+z-1)=0 \Leftrightarrow (P): x+(1+m)y+(1+m)z-m-3=0 \qquad (1)$$

Điểm $A(1, 1, 1) \in (P) \Leftrightarrow 1+1+m+1+m-m-3=0 \Leftrightarrow m=0$.

Thay m=0 vào (1) được (P): x+y+z-3=0.

- *Xác định phương trình mặt phẳng (Q)*

(Q) thuộc chùm tạo bởi (d_2), có dạng:

$$(Q): x-2y-2z+9+n(y-z+1)=0 \Leftrightarrow (Q): x+(n-2)y-(n+2)z+9+n=0 \qquad (2)$$

Điểm $A(1, 1, 1) \in (Q) \Leftrightarrow 1+n-2-(n+2)+9+n=0 \Leftrightarrow n=-6$.

Thay n=-6 vào (2) được (Q): x-8y+4z+3=0.

- Phương trình giao tuyến (d) của (P) và (Q) có dạng:

$$(d): \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - 8y + 4z + 3 = 0 \end{cases}.$$

Gọi $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d), (d_1), (d_2), ta có:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}\,(12,-3,-9) \text{ chọn } \vec{a}\,(-4, 1, 3).$$

$$\vec{a}_1\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_1(0, -1, 1),$$

$$\vec{a}_2\left(\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_2(4, 1, 1).$$

Nhận xét rằng: (d) không song song với (d_1) và (d_2).

Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Cách 2. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa (d_1), ta có (P): x+y+z-3=0.

Gọi B là giao điểm của (P) và (d_2). Khi đó tọa độ của B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-2y-2z+9=0 \\ y-z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3/2 \\ z=5/2 \end{cases} \Rightarrow B(-1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}).$$

Gọi (d) là đường thẳng qua A, B, ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(1,1,1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(-2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{qua } A(1,1,1) \\ \text{vtcp } (-4,1,3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x=1-4t \\ y=1+t \\ z=1+3t \end{cases}, (t\in R).$$

Gọi $\vec{a}_1$ là vtcp của (d_1), ta có: $\vec{a}_1(0, -1, 1)$.

Từ đó, dễ thấy $\vec{a}_1$ không cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Ví dụ 2: Viết phương trình đường thẳng đi qua A(3, -1, 3) và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} 3x-2y-8=0 \\ 5x+2z-12=0 \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x=-1+3t \\ y=-3-2t \\ z=2-t \end{cases}, (t\in R).$$

Giải.

- Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa (d_1), ta có:

  (P) thuộc chùm tạo bởi (d_1), có dạng:

  (P): 5x+2z-12+m(3x-2y-8)=0 ⇔ (P): (5+3m)x-2my+2z-8m-12=0 (1)

  Điểm A(3, -1, 3)∈(P) ⇔ 3(5+3m) +2m+6-8m-12=0 ⇔ m=-3.

  Thay m=-3 vào (1) được (P): -2x+3y+z+12=0.

- Gọi B là giao điểm của (P) và (d_2).

  Thay phương trình tham số của (d_2) vào phương trình (P), ta được :

  $$-2(-1+3t)+3(-3-2t)+2-t+12=0 \Leftrightarrow t=\frac{7}{13}.$$

  Thay $t=\frac{7}{13}$ vào phương trình tham số của (d_2) ta được $B(\frac{8}{13}, -\frac{53}{13}, \frac{19}{13})$.

- Gọi (d) là đường thẳng qua A, B, ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(3,-1,3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(-\frac{31}{13}, -\frac{40}{13}, -\frac{20}{13}) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{qua } A(3,-1,3) \\ \text{vtcp } (31,40,20) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x=3+31t \\ y=-1+40t \\ z=3+20t \end{cases},$$

Gọi $\vec{a}_1$ là vtcp của (d_1), ta có:

$$\vec{a}_1\left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_1(-4, -6, 10)$$

Từ đó, dễ thấy $\vec{a}_1$, $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương.

Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Ví dụ 3: Viết phương trình đường thẳng đi qua A(1, 1, 0) và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cho bởi :

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 2 + u \end{cases}, (t, u \in R).$$

Giải.

Cách 1.

- Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa (d_1).

  Chuyển phương trình (d_1) về dạng tổng quát:

  $$(d_1): \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

  (P) thuộc chùm tạo bởi (d_1), có dạng:

  (P): m(x+y-1)+z=0 ⇔ (P): mx+my+z-m=0 (1)

  Điểm A(1, 1, 0)∈(P) ⇔ m+m-m=0 ⇔ m=0.

  Thay m=0 vào (1) được (P): z=0.

- Gọi $B=(P)\cap(d_2)$. Thay phương trình tham số của (d_2) vào phương trình của (P), ta được:

  $2+u=0 \Leftrightarrow u=-2 \Rightarrow B(0,0,0)$.

- Gọi (d) là đường thẳng qua A, B, ta có:

  $$(d): \begin{cases} \text{qua } B(0,0,0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{BA}(1,1,0) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, (t \in R).$$

  Gọi $\vec{a}_1$ là vtcp của (d_1), ta có: $\vec{a}_1(1, -1, 0)$

  Từ đó, dễ thấy $\vec{a}_1$ không cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

  Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Cách 2.

- Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng và (d) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại các điểm B, C. Khi đó:

  Điểm $B\in(d_1) \Rightarrow B(1+t, -t, 0)$

  Điểm $C\in(d_2) \Rightarrow C(0, 0, 2+u)$.

- Ba điểm A, B, C thẳng hàng

  $$\Leftrightarrow \frac{t}{-1} = \frac{-t-1}{-1} = \frac{0}{2+u} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ u = -2 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \\ C(0,0,0) \end{cases}$$

- Khi đó đường thẳng (d) được cho bởi:

  $$(d): \begin{cases} \text{qua } A(1,1,0) \\ \text{qua } C(0,0,0) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{qua } C(0,0,0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{CA}(1,1,0) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, (t \in R).$$

Ví dụ 4: Viết phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

$$(\Delta): \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{1},\ (d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{3},\ (d_2): \begin{cases} x-y+4z-3=0 \\ 2x-y-z+1=0 \end{cases}.$$

Giải.

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{b}$ theo thứ tự là vtcp của (d_1), (d_2) và (Δ), ta có:

$\vec{a}_1$ (2, 4, 3),

$$\vec{a}_2\left(\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_2(5, 9, 1),$$

$\vec{b}$ (3, -1, 1).

- Gọi (Q_1) là mặt phẳng chứa (d_1) và song song với (Δ). Ta có:
  Lấy A(1, -2, 2)∈ (d_1). Sử dụng tích hỗn tạp, ta được:
  $M(x, y, x) \in (Q_1) \Leftrightarrow D(\overrightarrow{AM}, \vec{a}_1, \vec{b})=0 \Leftrightarrow 7x+8y-13z+35=0.$
- Gọi (Q_2) là mặt phẳng chứa (d_2) và song song với (Δ). Ta có:
  Lấy B(-4, -7, 0)∈ (d_2).Sử dụng tích hỗn tạp.
  $N(x, y, x) \in (Q_2) \Leftrightarrow D(\overrightarrow{BN}, \vec{a}_2, \vec{b})=0 \Leftrightarrow 5x-y-16z+13=0$
- Gọi $(d)=(Q_1)\cap(Q_2)$. Vậy (d) có dạng:

$$(d): \begin{cases} 7x+8y-13z+35=0 \\ 5x-y-16z+13=0 \end{cases},$$

khi đó(d) có một vtcp $\vec{a} = \vec{b}$ (3, -1, 1) ⇒ (d) cắt cả (d_1), (d_2).

Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

II. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (ĐHXD-94): Viết phương trình chính tắc của đường thẳng qua điểm A(1, 5, 0) và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} 2x-z-1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \quad (d_2): \begin{cases} 3x+y-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}.$$

BÀI GIẢI

Cách 1 Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), trong đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua A} \\ (d_1) \in (P) \end{cases} \text{ và } (Q): \begin{cases} \text{qua A} \\ (d_2) \in (Q) \end{cases}.$$

- Xác định phương trình mặt phẳng (P).
  Bởi (P) thuộc chùm tạo bởi (d_1), có dạng:
  (P): x+y-1+m(2x-z-1)=0 ⇔ (P): (1+2m)x+y-mz-m-1=0 (1)
  Điểm M(1, 5, 0)∈(P) ⇔ 1+2m+5-m-1=0 ⇔ m=-5.
  Thay m=-5 vào (1) được (P): -9x+y+5z+4=0.

- Xác định phương trình mặt phẳng (Q).

  Bởi (Q) thuộc chùm tạo bởi (d_2), có dạng:

  (Q): 3x+y-2+n(y-z-2)=0 ⇔ (Q): 3x+(1+n)y-nz-2n-2=0 (2)

  Điểm M(1, 5, 0)∈(P) ⇔ 3+5(1+n)-2n-2=0 ⇔ n=-2.

  Thay n=-2 vào (2) được (Q): 3x-y+2z+2=0.

- Phương trình giao tuyến (d) của (P) và (Q) có dạng

  $$(d): \begin{cases} -9x + y + 5z + 4 = 0 \\ 3x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}.$$

  Gọi $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d), (d_1), (d_2), ta có:

  $\vec{a}$ (7,33,6); $\vec{a}_1$ (1,-1,2); $\vec{a}_2$ (-1,3,3).

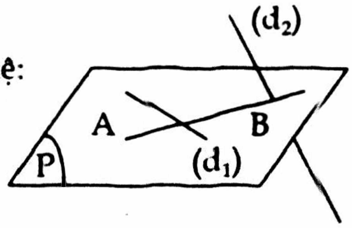
  Nhận xét rằng: (d) không song song với (d_1) và (d_2).

  Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Cách 2

- Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa (d_1), ta có:

  (P): -9x+y+5z+4=0.



- Gọi B=(P)∩(d_2). Khi đó toạ độ của B là nghiệm hệ:

  $$\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \\ -9x + y + 5z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{2}{9}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

- Gọi (d) là đường thẳng qua A, B, ta có:

  $$(d): \begin{cases} \text{qua } A(1,5,0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}\left(-\frac{7}{9}, -\frac{11}{3}, -\frac{2}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{qua } A(1,5,0) \\ \text{vtcp } (7,33,6) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-1}{7} = \frac{y-5}{33} = \frac{z}{6}.$$

  Gọi $\vec{a}_1$ là vtcp của (d_1), ta có: $\vec{a}_1 = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_1$ (1, -1, 2)

  ⇒ $\vec{a}_1$ và $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương.

  Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Bài 2 (ĐHMĐC-94/Đề 80-Va): Viết phương trình đường thẳng qua điểm A(-4,-5,3) và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cho bởi:

$$(d_1): \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1} \qquad (d_2): \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}.$$

BÀI GIẢI

Cách 1. Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), trong đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_1) \in (P) \end{cases} \text{ và } (Q): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_2) \in (Q) \end{cases}.$$

- Xác định phương trình mặt phẳng (P)

  Chuyển phương trình (d_1) về dạng tổng quát:

  $$(d): \begin{cases} 2x + 3y + 11 = 0 \\ x + 3z - 5 = 0 \end{cases}.$$

(P) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d_1), có dạng:

(P): x+3z-5+m(2x+3y+11)=0

⇔ (P): (1+2m)x+3my+3z+11m-5=0 (1)

Điểm A∈(P) ⇔ (1+2m)(-4)+3m.(-5)+3.3+11m-5=0 ⇔ m=0.

Thay m=0 vào (1) được (P): x+3z-5=0.

- Xác định phương trình mặt phẳng (Q)

Chuyển phương trình (d_2) về dạng tổng quát:

$$(d): \begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ 5x + 2z - 12 = 0 \end{cases}.$$

(Q) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d_2), có dạng:

(Q): 3x-2y-8+n(5x+2z-12)=0

⇔ (Q): (3+5n)x-2y+2nz-8-12n=0. (2)

Điểm A∈(Q) ⇔ (3+5n)(-4)-2(-5)+2n.3-8-12n =0 ⇔ $n=-\frac{5}{13}$.

Thay $n=-\frac{5}{13}$ vào (2) được (Q): 7x-13y-5z-22=0.

- Phương trình giao tuyến (d) của (P) và (Q) có dạng:

$$(d): \begin{cases} x + 3z - 5 = 0 \\ 7x - 13y - 5z - 22 = 0 \end{cases}.$$

Gọi $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d), (d_1), (d_2), ta có:

$\vec{a}(3, 2, -1)$;

$\vec{a}_1(3,-2,-1)$;

$\vec{a}_2(2,3,-5)$.

Nhận xét rằng: (d) không song song với (d_1) và (d_2).

Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Cách 2.

- Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa (d_1), ta có:

  (P): x+3z-5=0.

- Gọi B là giao điểm của (P) và (d_2). Khi đó toạ độ của B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 3z - 5 = 0 \\ \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow B(2, -1, 1).$$

- Gọi (d) là đường thẳng thoả mãn :

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(-4,-5,3) \\ \text{qua } B(2,-1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}.$$

Dễ thấy (d) không song song với (d_1).

Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Bài 3 (ĐHNN-97): Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình là:

$$(d_1): \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -5t \\ z = 2 + t \end{cases}, (t \in R).$$

Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A(1, 1, 1) và cắt đồng thời cả (d_1) và (d_2).

BÀI GIẢI

Cách 1. Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), trong đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_1) \in (P) \end{cases} \text{ và } (Q): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_2) \in (Q) \end{cases}.$$

- Xác định phương trình mặt phẳng (P)

  (P) thuộc chùm tạo bởi (d_1), có dạng:

  (P): $x-y+z+1+m(x+y+2z)=0 \Leftrightarrow$ (P): $(1+m)x+(m-1)y+(2m+1)z+1=0$ (1)

  Điểm $A(1, 1, 1) \in (P) \Leftrightarrow 1+m+m-1+2m+1+1=0 \Leftrightarrow m=-1/2$.

  Thay $m=-1/2$ vào (1) được (P): $x-3y+2=0$.

- Xác định phương trình mặt phẳng (Q)

  Chuyển phương trình (d_2) về dạng tổng quát:

  $$(d_2): \begin{cases} 5x + 2y + 10 = 0 \\ x - 2z + 6 = 0 \end{cases}.$$

  (Q) thuộc chùm tạo bởi (d_2), có dạng:

  (Q): $5x+2y+10+n(x-2z+6)=0 \Leftrightarrow$ (Q): $(5+n)x+2y-2nz+10+6n=0$ (2)

  Điểm $A(1, 1, 1) \in (Q) \Leftrightarrow 5+n+2-2n+10+6n=0 \Leftrightarrow n=-17/5$.

  Thay $n=-17/5$ vào (2) được (Q): $4x+5y+17z-26=0$.

- Phương trình giao tuyến (d) của (P) và (Q) có dạng:

  $$(d): \begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ 4x + 5y + 17z - 26 = 0 \end{cases}.$$

  Gọi $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d), (d_1), (d_2), ta có:

  $\vec{a}(-51,-17,17)$; $\vec{a}_1(3,1,-2)$; $\vec{a}_2(2,-5,1)$.

  Nhận xét rằng: (d) không song song với (d_1) và (d_2).

  Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Cách 2.

- Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa (d_1), ta có:

  (P): $x-3y+2=0$.

- Gọi B là giao điểm của (P) và (d_2).

  Bằng cách thay x, y, z của (d_2) vào (P), ta được:

  $2t-2-3(-5t)+2=0 \Leftrightarrow t=0$.

  Thay t=0 vào phương trình tham số của đường thẳng (d_2) được B(-2, 0, 2).

- Phương trình (d) được xác định bởi:

  $$\begin{cases} \text{qua } A(1,1,1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(3,1,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

  Nhận xét rằng (d) không song song với (d_1).

  Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Bài 4 (ĐHXD-98): Viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (P): x+y+z=1 và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cho bởi:

$$(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = z, \quad (d_2): \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

BÀI GIẢI

Cách 1. Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{n}$ theo thứ tự là vtcp của (d_1), (d_2) và vtpt của (P), ta có:

$\vec{n}(1, 1, 1)$; $\vec{a}_1(2, -1, 1)$; $\vec{a}_2(-1, 0, 1)$;

- Gọi (Q_1) là mặt phẳng chứa (d_1) và vuông góc với (P).
  Lấy $A(1, -1, 0) \in (d_1)$.
  Sử dụng tích hỗn tạp, ta được:
  $M(x, y, x) \in (Q_1) \Leftrightarrow D(\overrightarrow{AM}, \vec{a}_1, \vec{n}) = 0 \Leftrightarrow 2x+y-3z-1=0$
- Gọi (Q_2) là mặt phẳng chứa (d_2) và vuông góc với (P).
  Lấy $B(0, -1, -1) \in (d_2)$.
  Sử dụng tích hỗn tạp, ta được:
  $N(x, y, x) \in (Q_2) \Leftrightarrow D(\overrightarrow{BN}, \vec{a}_2, \vec{n}) = 0 \Leftrightarrow x-2y+z-1=0.$
- Gọi (d) là giao tuyến của (Q_1) và (Q_2). Vậy (d) có dạng:
  $$(d): \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}.$$

khi đó (d) có một vtcp $\vec{a} = \vec{n}(1, 1, 1)$. Vậy (d) cắt cả (d_1) và (d_2).
Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Cách 2. Sử dụng chùm mặt phẳng.

- Gọi (Q_1) là mặt phẳng chứa (d_1) và vuông góc với (P).
  Chuyển phương trình (d_1) về dạng tổng quát:, ta được:
  $$(d_1): \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}.$$
  (Q_1) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi(d_1), có dạng:
  (Q_1): x+(2+m)y+mz+1+m=0 (1)

khi đó (Q_1) có vtpt $\vec{n}_1(1, 2+m, m)$.
Vì $(Q_1) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n}_1 = 0 \Leftrightarrow 1+2+m+m = 0 \Leftrightarrow n = -3/2$.
Thay m=-3/2vào (1), được (Q_1): 2x+ y-3z-1=0.

- Gọi (Q_2) là mặt phẳng chứa (d_2) và vuông góc với (P).
  (Q_2) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d_2), có dạng:
  (Q_2): (1+2n)x-2(1+n)y+(1+2n)z-1+n=0 (2)

khi đó (Q_2) có vtpt $\vec{n}_2(1+2n, -2(1+n), 1+2n)$.
Vì $(Q_2) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow n = 0$.
Thay n=0 vào (2), được (Q_2): x-2y+z-1=0.
Dễ thấy (Q_1) không song song với (Q_2).

- Đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt cả 2 đường thẳng (d_1) và (d_2) chính là giao tuyến của (Q_1) và (Q_2). Vậy (d) có dạng:
  $$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}.$$

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Viết phương trình đường thẳng đi qua A(1, 2, 3) và cắt cả hai đường thẳng

a. $(d_1): \begin{cases} x + 8z + 23 = 0 \\ y - 4z + 10 = 0 \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$.

b. $(d_1): \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ $(d_2): \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$

Bài tập 2. Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc toạ độ và cắt cả hai đường thẳng

$$(d_1): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = u + 2 \\ y = -3 + 2u \\ z = 3u + 1 \end{cases}, (t, u \in R).$$

Bài tập 3. Viết phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) biết :

$$(\Delta): \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}, (d_1): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, (t \in R) \text{ và } (d_2): \begin{cases} x + 2z - 2 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}.$$

Bài tập 4. (ĐHDL-97): Viết phương trình đường thẳng qua điểm A(1, -1, 0) và cắt cả hai đường thẳng $(d_1): \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ và $(d_2): \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$.

Bài tập 5. (ĐHTS-99): Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua A(-4, -5, 3) cắt hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cho bởi :

$$(d_1): \begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ 5x + 2z - 12 = 0 \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, (t \in R).$$

Bài tập 6. Viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc với (P): x+y+z-2=0 và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cho bởi :

$$(d_1): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, (t \in R); \quad (d_2): \begin{cases} x + 2z - 2 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}.$$

Bài tập 7. Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc toạ độ và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) biết:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = u + 2 \\ y = -3 + 2u \\ z = 3u + 1 \end{cases}, (t, u \in R).$$

CHỦ ĐỀ 2

ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM VUÔNG GÓC VỚI HAI ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A và vuông góc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cho trước.

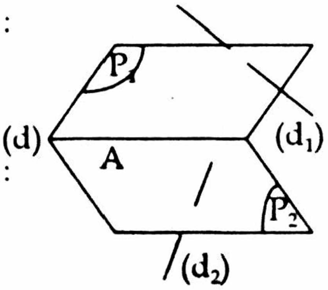
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để xác định phương trình đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cho trước, ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P_1) thoả mãn :

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua A} \\ (P_1) \perp (d_1) \end{cases}.$$



Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (P_2) thoả mãn :

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua A} \\ (P_2) \perp (d_2) \end{cases}.$$

Khi đó (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2).

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định các vtcp $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ của các đường thẳng (d_1), (d_2).

Bước 2: Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của đường thẳng (d), ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2].$$

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (d) thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{qua A} \\ \text{vtcp } \vec{a} \end{cases}.$$

Chú ý.

- Nếu bài toán yêu cầu viết phương trình tổng quát của (d), sử dụng cách 1.
- Nếu bài toán yêu cầu viết phương trình tham số hoặc chính tắc của đường thẳng (d), sử dụng cách 2.

Ví dụ 1: Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(1, 1, 1) và vuông góc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x - 2y - 2z + 9 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Giải.

Gọi $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1), (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(0, -1, 1)$; $\vec{a}_2(4, 1, 1)$.

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp " ***Lấy học trò làm trung tâm*** "
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

Cách 1. Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), trong đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_1) \perp (P) \end{cases} \text{ và } (Q): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_2) \perp (Q) \end{cases}.$$

- Phương trình mặt phẳng (P) cho bởi :

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(1,1,1) \\ \text{vtpt } \vec{a}_1(0,-1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 0(x-1)-1(y-1)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow (P): y-z=0.$$

- Phương trình mặt phẳng (Q) cho bởi :

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } A(1,1,1) \\ \text{vtpt } \vec{a}_2(4,1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 4(x-1)+1(y-1)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow (Q): 4x+y+z-6=0.$$

- Phương trình giao tuyến (d) của (P) và (Q) có dạng :

$$(d): \begin{cases} y - z = 0 \\ 4x + y + z - 6 = 0 \end{cases}.$$

Cách 2. Giả sử (d) với vtcp $\vec{a}$ là đường thẳng cần dựng. Ta có:

$$\begin{cases} (d) \perp (d_1) \\ (d) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a}\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right) = \vec{a}(-2, 4, 4) \text{ chọn } \vec{a}(-1, 2, 2).$$

- Khi đó phương trình (d) được xác định bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(1,1,1) \\ \text{vtpt } \vec{a}(-1,2,2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, (t \in R).$$

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (ĐHD-98): Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A(0, 1, 1) và vuông góc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cho bởi:

$$(d_1): \frac{x-1}{8} = \frac{y+2}{1} = z, (d_2): \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}.$$

BÀI GIẢI

Gọi $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự tà vtcp của các đường thẳng (d), (d_1), (d_2), ta có: $\vec{a}_1(8, 1, 1)$, $\vec{a}_2(0, -1, -1)$.

Cách 1.

- Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (d_1), ta có :

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(0,1,1) \\ \text{vtptt } \vec{a}_1(8,1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 8x+y-1+z-1=0 \Leftrightarrow (P): 8x+y+z-2=0.$$

- Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (d_2), ta có :

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } A(0,1,1) \\ \text{vtpt } \vec{a}_2(0,-1,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): -(y-1)-(z-1)=0 \Leftrightarrow (Q): y+z-2=0$$

- Đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chính là giao tuyến của (P) và (Q). Vậy (d) có dạng:

$$\begin{cases} 8x + y + z - 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Cách 2. Đường thẳng (d) vuông góc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}\,(0, 8, -8).$$

- Khi đó đường thẳng (d) thoả mãn :

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(0,1,1) \\ \text{vtpt } \vec{a}(0,1,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Bài 2 (ĐHTCKT-99): Viết phương trình chính tắc của đường thẳng (d_1) đi qua điểm A(1, 1, -2) song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (d) biết

$$(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}\ ; (P): x-y-z-1=0.$$

BÀI GIẢI

Gọi $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, theo thứ tự là vtcp của (d), (d_1), ta có: $\vec{a}$ (2, 1, 3).

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (P), ta có: $\vec{n}$ (1, -1, -1).

Cách 1.

- Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (d), ta có :

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } A(1,1,-2) \\ \text{vtpt } \vec{a}(2,1,3) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 2(x-1)+y-1+3(z+2)=0$$

$\Leftrightarrow$ (Q): 2x+y+3z+3=0.

- Gọi (R) là mặt phẳng đi qua A và song song với (P), ta có:

$$(R): \begin{cases} \text{qua } A(1,1,-2) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1,-1,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (R): x-1-(y-1)-(z+2)=0$$

$\Leftrightarrow$ (R): x-y-z-2=0.

- Đường thẳng (d_1) đi qua A, song song với (P) và vuông góc với (d) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (Q) và (R). Vậy (d_1) có dạng:

$$(d_1): \begin{cases} 2x + y + 3z + 3 = 0 \\ x - y - z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Cách 2. Đường thẳng (d_1) song song với (P) và vuông góc với (d)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{n} \perp \vec{a}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a}\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}\,(2, 5, -3).$$

- Vậy đường thẳng (d_1) thoả mãn:

$$(d_1) \begin{cases} \text{qua } A(1,1,-2) \\ \text{vtcp } \vec{a}(2,5,-3) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}.$$

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(1, 2, 3) và vuông góc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cho bởi:

a. $(d_1): \begin{cases} x + 8z + 23 = 0 \\ y - 4z + 10 = 0 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$.

b. $(d_1): \begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ 5x + 2z - 12 = 0 \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

CHỦ ĐỀ 3

ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM VUÔNG GÓC VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ CẮT MỘT ĐƯỜNG THẲNG KHÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Viết phương trình đường thẳng qua điểm A, vuông góc với đường thẳng (d_1) và cắt đường thẳng (d_2) cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có thể lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P_1) thoả mãn :

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_1) \perp (P_1) \end{cases}.$$

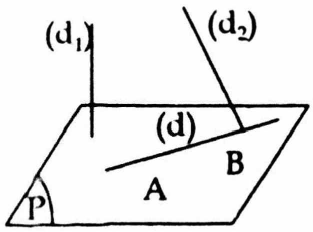
Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (P_2) thoả mãn :

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_2) \subset (P_2) \end{cases}.$$

Bước 3: Kết luận:

- Nếu $(P_1) \equiv (P_2)$. Kết luận: bài toán có vô số nghiệm.
- Nếu $(P_1) \neq (P_2)$. Gọi (d) là giao tuyến của (P_1) và (P_2).
  - Nếu $(d) // (d_2)$. Kết luận: bài toán vô nghiệm.
  - Còn lại, kết luận: (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:



Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P) thoả mãn :

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_1) \perp (P) \end{cases}.$$

Bước 2: Xác định giao điểm B của (d_2) và (P).

- Nếu không tồn tại giao điểm. Kết luận vô nghiệm.
- Nếu có vô số giao điểm ($(d_2) \in (P)$). Kết luận có vô số đường thẳng trong (P) đi qua A cắt (d_2).
- Nếu có nghiệm duy nhất thực hiện bước 3.

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (d) thoả mãn :

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

Cách 3: (Được áp dụng khi (d_2) cho dưới dạng tham số) Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giả sử (d) cắt (d_2) tại B, khi đó toạ độ B thoả mãn phương trình tham số của (d_2), từ đó suy ra $\overrightarrow{AB}$.

Xác định toạ độ vectơ $\vec{a}_1$ là một vtcp của (d_1).

Bước 2: Vì $(d)\perp(d_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\vec{a}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{a}_1=0 \Rightarrow$ toạ độ điểm B.

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (d) thoả mãn :

$$(d): \begin{cases} \text{qua A} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

Chú ý

- Nếu bài toán yêu cầu viết phương trình tổng quát của (d), sử dụng cách 1.
- Nếu bài toán yêu cầu viết phương trình tham số hoặc chính tắc của đường thẳng (d), sử dụng cách 2 hoặc cách 3.

Ví dụ 1. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A(1, 1, 0), vuông góc với đường thẳng (d_1) và cắt đường thẳng (d_2) có phương trình

$$(d_1): \frac{x-1}{8} = \frac{y+2}{1} = z,\ (d_2): \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+1=0 \end{cases}.$$

Giải.

Cách 1. Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), trong đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua A} \\ (d_1)\perp(P_1) \end{cases} \text{ và } (P_2): \begin{cases} \text{qua A} \\ (d_2)\subset(P_2) \end{cases}.$$

- Phương trình mặt phẳng (P_1)

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua A} \\ (d_1)\perp(P_1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua A}(1,1,0) \\ \text{vtpt } \vec{n} = \vec{a}_1(8,1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): 8x+y+z-9=0.$$

- Phương trình mặt phẳng (P_2)

(P_2) thuộc chùm tạo bởi (d_2), có dạng:

(P_2): x+y-z+2+n(x+1)=0 $\Leftrightarrow$ (P_2): (1+n)x+y-z+2+n=0 (1)

Điểm A(1, 1, 0)$\in$ (P_2) $\Leftrightarrow$ 1+n+1+2+n=0 $\Leftrightarrow$ n=-2.

Thay n=-2 vào (1) được (P_2): -x+y-z=0.

- Phương trình giao tuyến (d) của (P_1) và (P_2) có dạng:

$$(d): \begin{cases} 8x+y+z-9=0 \\ -x+y-z=0 \end{cases}.$$

Cách 2.

- Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với (d_1), ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{qua A}(1,1,0) \\ \text{vtpt } \vec{n} = \vec{a}_1(8,1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 8x+y+z-9=0.$$

- Gọi $B=(d_2)\cap(P)$. Khi đó toạ độ B là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+1=0 \\ 8x+y+z-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=8 \\ z=9 \end{cases} \Leftrightarrow B(-1,8,9).$$

- Đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện đầu bài được xác định bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(1,1,0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(-2,7,9) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x=1-2t \\ y=1+7t \\ z=9t \end{cases}, (t\in R).$$

Ví dụ 2: Viết phương trình đường thẳng đi qua A(0, 1, 1) vuông góc với đường thẳng (d_1) và cắt đường thẳng (d_2) cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=-1 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x=2u \\ y=1+u \\ z=u \end{cases} \quad (t, u\in R).$$

Giải.

Cách 1. Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), trong đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_1)\perp(P_1) \end{cases} \text{ và } (P_2): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_2)\in(P_2) \end{cases}.$$

- Phương trình mặt phẳng (P_1)

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_1)\perp(P_1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{qua } A(0,1,1) \\ \text{vtpt } \vec{n}=\vec{a}_1(-1,1,0) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): x-y+1=0.$$

- Phương trình mặt phẳng (P_2)

  Chuyển phương trình (d_2) về dạng tổng quát: :

$$(d_2): \begin{cases} x-2z=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}.$$

(P_2) thuộc chùm tạo bởi (d_2), có dạng:

$$(P_2): y-z-1+n(x-2z)=0 \Leftrightarrow (P_2): nx+y-(2n+1)z-1=0 \quad (1)$$

Để $A(0, 1, 1)\in(P_2) \Leftrightarrow 1-2n-1-1=0 \Leftrightarrow n=-\frac{1}{2}$.

Thay $n=-\frac{1}{2}$ vào (1) được (P_2): x-2y+2=0.

- Phương trình giao tuyến (d) của (P_1) và (P_2) có dạng:

$$(d): \begin{cases} x-y+1=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases}.$$

Cách 2.

- Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với (d_1), ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(0,1,1) \\ \text{vtpt } \vec{n}=\vec{a}_1(-1,1,0) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x-y+1=0.$$

- Gọi $B=(d_2)\cap(P)$. Thay x, y, z từ phương trình tham số của (d_2) vào phương trình (P), ta được:

$$2u-(1+u)+1=0 \Leftrightarrow u=0 \Rightarrow B(0, 1, 0).$$

- Đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện đầu bài được xác định bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(0,1,1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(0,0,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}, (t \in R).$$

Cách 3. Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng và cắt (d_2) tại B, khi đó :

$$B(2u, 1+u, u) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(2u, u, u-1).$$

Gọi $\vec{a}_1$ là một vtcp của (d_1), ta có $\vec{a}_1(-1, 1, 0)$.

- Vì $(d)\perp(d_1)$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{a}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{a}_1 = 0 \Leftrightarrow -2u+u=0 \Leftrightarrow u=0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}(0, 0, -1).$$

- Phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(0,1,1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(0,0,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}, (t \in R).$$

Ví dụ 3 (CĐSP TP.HCM - 97): Cho điểm M(-1, 2, 3), vectơ $\vec{a}(6, -2, -3)$ và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} 2x - 3y - 5 = 0 \\ 5x + 2z - 14 = 0 \end{cases}.$$

a. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa M và (d).
b. Lập phương trình đường thẳng (Δ) qua điểm M vuông góc với vectơ $\vec{a}$ và cắt đường thẳng (d)

Giải.

a. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d) ⇒ (P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) có dạng:

$$2x-3y-5+m(5x+2z-14)=0$$

$$\Leftrightarrow (P): (2+5m)x-3y+2mz-5-14m=0 \qquad (1)$$

Điểm $M(-1, 2, 3)\in(P) \Leftrightarrow (2+5m)(-1)-3.2+2m.3-5-14m=0 \Leftrightarrow m=-1$.

Thay m=-1 vào (1), ta được:

$$(P): 3x+3y+2z-9=0.$$

b. Ta có :

- Gọi (Q) là mặt phẳng qua M vuông góc với vectơ $\vec{a}$

$$\Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } M(-1,2,3) \\ \text{vtpt } \vec{a}(6,-2,-3) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 6x-2y-3z+19=0.$$

- Khi đó $(\Delta)=(P)\cap(Q)$, có phương trình được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} 3x + 3y + 2z - 9 = 0 \\ 6x - 2y - 3z + 19 = 0 \end{cases}.$$

II. BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (HVBCVT-94/ĐHKTQD-95/Đề 95-Va) Viết phương trình đường thẳng qua điểm M(-1, 2, -3) vuông góc với vectơ $\vec{a}$ (6, -2, -3) và cắt đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}.$$

BÀI GIẢI

- Gọi (P) là mặt phẳng qua M vuông góc với vectơ $\vec{a}$

$$\Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } M(-1,2,-3) \\ \text{vtpt } \vec{a}(6,-2,-3) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 6x-2y-3z+1=0.$$

- Gọi N là là giao điểm của (d) và (P).

Chuyển phương trình (d) về dạng tham số, ta được

$$(d): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 5t \end{cases}, t \in R.$$

Thay x, y, z vào phương trình của(P), ta được:

$$6(3t+1)-2(2t-1)-3(-5t+3)+1=0 \Leftrightarrow t=0.$$

Thay t=0, vào phương trình tham số của (d), ta được toạ độ N(1, -1, 3).

- Khi đó:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } M(-1,2,-3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MN}(2,-3,6) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}.$$

Nhận xét rằng (d_1) không song song với (d).

Vậy, (d_1) chính là đường thẳng cần dựng.

Bài 2 (ĐHQG-96/ĐHD-98/Đề 91-Va): Viết phương trình chính tắc của đường thẳng qua điểm A(0, 1, 1) vuông góc với đường thẳng (d_1) và cắt đường thẳng (d_2) cho bởi:

$$(d_1): \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = z \text{ và } (d_2): \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+1=0 \end{cases}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Để viết phương trình chính tắc của đường thẳng qua điểm A vuông góc với đường thẳng (d_1) và cắt đường thẳng (d_2), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với đường thẳng (d_1), ta được: (P): 3x+y+z-2=0.

Bước 2: Xác định toạ độ giao điểm B của (P) và (d_2), ta được: B(-1, 2, 3).

Bước 3: Phương trình đường thẳng (d) thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB} \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

Nhận xét rằng $(d_1)//(d)$.

Vậy, (d) chính là đường thẳng qua điểm A vuông góc với (d_1) và cắt (d_2).

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. (ĐHSP TP.HCM - 95): Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(0, 1, 1) và vuông góc với (d_1) và cắt (d_2) biết:

$$(d_1): \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}, \quad (d_2): \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+1=0 \end{cases}.$$

Bài tập 2. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(1, 1, 1) và vuông góc với (d_1) và cắt (d_2) biết:

$$(d_1): \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} x-2y-2z+9=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}.$$

Bài tập 3. Viết phương trình đường thẳng cắt cả ba đường thẳng (d_1), (d_2), (d_3) và vuông góc với vectơ $\vec{u}$ (1, 2, 3) biết:

$$(d_1): \begin{cases} x-y+1=0 \\ z+1=0 \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} x+y-1=0 \\ z=0 \end{cases}, \quad (d_3): \begin{cases} x-y-1=0 \\ z=1 \end{cases}.$$

Bài tập 4. Tìm tất cả các đường thẳng cắt (d_1), (d_2) dưới cùng một góc, biết

$$(d_1): \begin{cases} mx-y=0 \\ z=a \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} mx+y=0 \\ z=-a \end{cases}.$$

Bài tập 5. (ĐHTL - 97): Viết phương trình đường thẳng đi qua A(3, -2, -4) song song với mặt phẳng (P): 3x-2y-3z-7=0 và cắt đường thẳng (d) biết:

$$(d): \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}.$$

CHỦ ĐỀ 4
HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC CỦA ĐIỂM LÊN MẶT PHẲNG

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Tìm toạ độ hình chiếu của một điểm lên một mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho điểm $A(x_A, y_A, z_A)$ và mặt phẳng (P), để xác định hình chiếu vuông góc H của A lên (P) ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Viết phương trình tham số của đường thẳng (d) qua A và vuông góc với (P) (t.l: (d) qua A và có vtcp là vtpt của (P)).

Bước 2: Toạ độ giao điểm H của (P) và (d) chính là hình chiếu vuông góc của A lên (P).

Ghi chú: Nếu mặt phẳng (P) cho dưới dạng tham số thì hãy chuyển nó về dạng tổng quát.

Bài toán 2: Tìm điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (P).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua (P). Để xác định toạ độ A_1, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên (P).

Bước 2: Với điều kiện H là trung điểm AA_1, ta xác định được toạ độ A_1.

Ví dụ 1: Cho điểm A(2, 3, -1) và mặt phẳng (P) có phương trình: 2x-y-z-5=0. Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P). Từ đó tìm toạ độ điểm , A_1 đối xứng với A qua (P).

Giải.

Mặt phẳng (P) có một vtpt $\vec{n}(2, -1, -1)$.

Gọi (d) là đường thẳng qua A và vuông góc với (P), ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(2,3,-1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,-1,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 - t \end{cases}, (t \in R).$$

Goi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P). Ta có $H=(d)\cap(P)$.

Thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào (P), ta được:

$$2(2+2t)-(3-t)-(-1-t)-5=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}.$$

Thay $t=\frac{1}{2}$ vào phương trình tham số của (d) ta được $H(3, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$.

Giả sử $A_1(x_1, y_1, z_1)$.

Vì H là trung điểm AA_1, ta có:

$$\begin{cases}2x_H = x_1 + x_A\\ 2y_H = y_1 + y_A\\ 2z_H = z_1 + z_A\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = 2x_H - x_A\\ y_1 = 2y_H - y_A\\ z_1 = 2z_H - z_A\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = 4\\ y_1 = 2\\ z_1 = -2\end{cases}.$$

Vậy $A_1(4, 2, -2)$.

Bài toán 3: Xác định phương trình đường thẳng đối xứng với một đường thẳng cho trước qua một mặt phẳng cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P). Gọi (d_1) là đường thẳng đối xứng với (d) qua (P). Để xác định (d_1) ta xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu (d)//(P), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lấy điểm $A \in (d)$.

Bước 2: Xác định toạ độ các điểm A_1 đối xứng với A qua (P).

Bước 3: Lập phương trình đường thẳng (d_1) qua A_1 và song song với (d).

Khả năng 1: Nếu $(d) \cap (P) = A$, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lấy điểm $B \in (d)$ $(B \neq A)$.

Bước 2: Xác định toạ độ các điểm B_1 đối xứng với B qua (P).

Bước 3: (d_1) chính là đường thẳng đi qua A, B_1.

Ví dụ 2: Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng có phương trình:

$$(P): 3x+6y-z-2=0 \text{ và } (d): \begin{cases}x + y - 7z - 14 = 0\\ x - y - z - 2 = 0\end{cases}.$$

a. Xác định toạ độ giao điểm A của (d) và (P).

b. Lập phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với (d) qua (P).

Giải.

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P), ta có:

$$\begin{cases}x + y - 7z - 14 = 0\\ x - y - z - 2 = 0\\ 3x + 6y - z - 2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0\\ y = 0\\ z = -2\end{cases}.$$

Vậy $(d) \cap (P) = A(0, 0, -2)$.

b. Lấy điểm $B(8, 6, 0) \in (d)$.

Mặt phẳng (P) có một vtpt $\vec{n}(3, 6, 1)$.

Gọi (Δ) là đường thẳng qua B và vuông góc với (P), ta có:

$$(\Delta): \begin{cases}\text{qua } B(8,6,0)\\ \text{vtcp } \vec{n}(3,6,-1)\end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases}x = 8 + 3t\\ y = 6 + 6t\\ z = -t\end{cases}, (t \in R).$$

Goi H là hình chiếu vuông góc của B lên (P). Ta có $H = (\Delta) \cap (P)$.

Thay x, y, z từ phương trình tham số của (Δ) vào (P), ta được:

$$3(8+3t)+6(6+6t)+t-2=0 \Leftrightarrow t=-\frac{29}{23}.$$

Thay $t=-\frac{29}{23}$ vào phương trình tham số của (Δ) ta được $H(\frac{97}{23},-\frac{36}{23},\frac{29}{23})$.

Gọi $B_1(x_1, y_1, z_1)$ là điểm đối xứng với B qua mặt phẳng (P) ⇒ H là trung điểm BB_1, ta có:

$$\begin{cases} 2x_H = x_1 + x_B \\ 2y_H = y_1 + y_B \\ 2z_H = z_1 + z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_H - x_B \\ y_1 = 2y_H - y_B \\ z_1 = 2z_H - z_B \end{cases} \Leftrightarrow B_1(\frac{10}{23},-\frac{210}{23},\frac{58}{23}).$$

Khi đó phương trình đường thẳng (d_1) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } A(0,0,-2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(5,-105,52) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 5t \\ y = -105t \\ z = -2 + 52t \end{cases}, (t \in R).$$

Ví dụ 3: Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng có phương trình:

$$(P): 2x+y+z-5=0 \text{ và } (d): \begin{cases} 3x + y + 2z - 4 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}.$$

a. CMR (d)//(P).

b. Lập phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với (d) qua (P).

Giải.

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P), ta có:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z - 4 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + 2z - 4 = 0 \\ 2x + 2y - 4 = 0 \\ 3x + 3y - 10 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy (d)//(P).

b. Lấy điểm A(0, 2, 1)∈(d).

Mặt phẳng (P) có một vtpt $\vec{n}(2, 1, 1)$.

Đường thẳng (d) có một vtcp $\vec{a}(-1, 1, 1)$.

Gọi (Δ) là đường thẳng qua A và vuông góc với (P), ta có:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } A(0,2,1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}, (t \in R).$$

Goi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P). Ta có H=(Δ)∩(P).

Thay x, y, z từ phương trình tham số của (Δ) vào (P), ta được:

$$2.2t+2+t+1+t-5=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}.$$

Thay $t=\frac{1}{3}$ vào phương trình tham số của (Δ) ta được $H(\frac{2}{3},\frac{7}{3},\frac{5}{3})$.

Gọi $A_1(x_1, y_1, z_1)$ là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (P) ⇒ H là trung điểm AA_1, ta có:

$$\begin{cases} 2x_H = x_1 + x_A \\ 2y_H = y_1 + y_A \\ 2z_H = z_1 + z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_H - x_A \\ y_1 = 2y_H - y_A \\ z_1 = 2z_H - z_A \end{cases} \Leftrightarrow A_1(\frac{4}{3},\frac{8}{3},\frac{2}{3}).$$

Khi đó phương trình đường thẳng (d_1) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } A_1(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3}) \\ \text{vtcp } \vec{a}(-1,1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x-\frac{4}{3}}{-1} = \frac{y-\frac{8}{3}}{1} = \frac{z-\frac{2}{3}}{1}.$$

II. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (ĐHQG TPHCM/D đợt 2-99): Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn Oxyz, cho điểm A(-2, 4, 3) và mặt phẳng (P): 2x-3y+6z+19=0.

a. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) chứa điểm A và song song với (P). Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

b. Hạ AH⊥(P). Viết phương trình tham số của đường thẳng (AH) và tìm toạ độ của H.

BÀI GIẢI

a. Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của mặt phẳng (P), ta có $\vec{n}$ (2, -3, 6). Ta có:

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } A(-2,4,3) \\ \text{vtpt } \vec{n}(2,-3,6) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 2x-3y+6z-2=0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q).

Khoảng cách giữa (P) và (Q) chính bằng khoảng cách từ A đến (P). Vậy:

$$d((P), (Q)) = d(A, (P)) = \frac{|2.(-2) - 3.4 + 6.3 + 19|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = 3.$$

b. Phương trình AH cho bởi:

$$(AH): \begin{cases} \text{qua } A(-2,4,3) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,-3,6) \end{cases} \Leftrightarrow (AH): \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 3 + 6t \end{cases}, t \in R.$$

Toạ độ của H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6z + 19 = 0 \\ x = -2 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 3 + 6t \end{cases} \Rightarrow H(-\frac{20}{7}, \frac{37}{7}, \frac{3}{7}).$$

Bài 2 (HVKTQS-98): Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn Oxyz cho bốn điểm A(4, 1, 4); B(3, 3, 1); C(1, 5, 5); D(1, 1, 1).

a. Tìm hình chiếu vuông góc của D lên (ABC) và tính thể tích tứ diện ABCD.

b. Viết phương trình tham số đường thẳng vuông góc chung của AC và BD.

BÀI GIẢI

a. *Phương trình mặt phẳng (ABC).*

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (ABC), khi đó:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overline{AC}(-3,4,1) \\ \vec{n} \perp \overline{BC}(-2,2,4) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}\left(\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) = \vec{n}\ (14, 10, 2), \text{ chọn } \vec{n}\ (7, 5, 1).$$

Mặt phẳng (ABC) được cho bởi:

$$(ABC): \begin{cases} \text{qua } A(4,1,4) \\ \text{vtpt } \vec{n}(7,5,1) \end{cases} \Leftrightarrow (ABC): 7x+5y+z-37=0 \quad (1)$$

Gọi (d) là đường thẳng qua D và vuông góc với (ABC), khi đó:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } D(1,1,1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(7,5,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1+7t & (2) \\ y = 1+5t & (3),\ t \in R \\ z = 1+t & (4) \end{cases}$$

Hình chiếu vuông góc của D lên (ABC) chính là giao điểm $D_1=(d) \cap (ABC)$.

Thay (2), (3), (4) vào (1), ta được:

$$7(1+7t)+5(1+5t)+1+t-37=0 \Leftrightarrow t=\frac{8}{25}.$$

Thay $t=\frac{8}{25}$ vào (2), (3), (4), ta được toạ độ $D_1(\frac{81}{25}, \frac{65}{25}, \frac{33}{25})$.

Tính thể tích tứ diện ABCD. Áp dụng tích hỗn tạp để tính thể tích tứ diện ABCD, ta có:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} -1 & 2 & -3 \\ -3 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}.48=8 \text{ (đvtt)}.$$

b. Thiết lập phương trình tham số của (AC) và (BD), ta có

$$(AC): \begin{cases} \text{qua } A(4,1,4) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AC}(-3,4,1) \end{cases} \Leftrightarrow (AC): \begin{cases} x = 4-3t \\ y = 1+4t \quad ,t \in R \\ z = 4+t \end{cases}$$

$$\text{và } (BD): \begin{cases} \text{qua } B(3,3,1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{BD}(2,2,0) \end{cases} \Leftrightarrow (BD): \begin{cases} x = 3+2u \\ y = 3+2u \quad ,u \in R \\ z = 1 \end{cases}$$

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AC và BD ($M \in (AC)$; $N \in (BD)$). Khi đó toạ độ của M, N theo thứ tự thoả mãn phương trình tham số của (AC) và (BD), tức là:

$$M(4-3t, 1+4t, 4+t); N(3+2u, 3+2u, 1) \Rightarrow \overrightarrow{MN}(2u+3t-1, 2u-4t+2, -3-t).$$

Từ điều kiện:

$$\begin{cases} MN \perp (AC) \\ MN \perp (BD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3(2u+3t-1)+4(2u-4t+2+(-3-t)=0 \\ 2(2u+3t-1)+2(2u-4t+2+0.(-3-t)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=5/17 \\ u=-3/17 \end{cases},$$

Thay t, u vào toạ độ M, N ta được toạ độ

$$M(\frac{53}{17}, \frac{37}{17}, \frac{73}{17}),\ N(\frac{45}{17}, \frac{45}{17}, 1).$$

Khi đó, phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) chính là phương trình (MN), được xác định bởi:

$$(MN): \begin{cases} \text{qua } N(\frac{45}{17}, \frac{45}{17}, 1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{NM}(\frac{8}{17}, -\frac{8}{17}, \frac{56}{17}) \end{cases} \Leftrightarrow (MN): \begin{cases} x = \frac{45}{17} + v \\ y = \frac{45}{17} - v \\ z = 1 + 7v \end{cases}, v \in R.$$

Bài 3 (HVKTQS-99): Cho hai điểm A(1,2,1), B(2,1,3) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): \begin{cases} x = 1 + u - v \\ y = -1 + u + v \\ z = 1 + u + 2v \end{cases}, u, v \in R.$$

a. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

b. Viết phương trình chính tắc của giao tuyến giữa (P) và (Q). Tìm toạ độ điểm K đối xứng với A qua (P).

BÀI GIẢI

a. Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ là một cặp vtcp của (P), ta có:

$\vec{a}_1(1, 1, 1)$, $\vec{a}_2(-1, 1, 2)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (P), ta có:

$$\vec{n}\left(\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{vmatrix}\right) = \vec{n}(1, -3, 2).$$

Vì $(Q) \perp (P) \Rightarrow \vec{n}$ là một vtcp của (Q). Vậy:

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } A(1,2,1) \\ \text{hai vtcp } \vec{n}(1,-3,2) \ \& \ \overrightarrow{AB}(1,-1,2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } A(1,2,1) \\ \text{vtpt } \vec{m}(-4,0,2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (Q): $-2(x-1)+z-1=0 \Leftrightarrow$ (Q): $2x-z-1=0$.

Chú ý. Có thể sử dụng tích hỗn tạp để xác định phương trình tổng quát mặt phẳng (Q).

b. Viết phương trình chính tắc của giao tuyến giữa (P) và (Q).

Chuyển phương trình (P) về dạng tổng quát:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } C(1,-1,1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1,-3,2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x-1-3(y+1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow (P): x-3y+2z-6=0.$$

Gọi (d) là của giao tuyến giữa (P) và (Q), ta được:

$$\begin{cases} 2x - z - 1 = 0 \\ x - 3y + 2z - 6 = 0 \end{cases}.$$

Chuyển phương trình (d) về dạng chính tắc.

- Lấy điểm $E(1, -1, 1) \in (d)$.

- Gọi $\vec{b}$ là một vtcp của (d), ta có:

$$\vec{b}\left(\begin{vmatrix}0 & -1\\-3 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 2\\2 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 0\\1 & -3\end{vmatrix}\right) = \vec{b}(-3, -5, -6).$$

Vậy (d) được xác định bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } E(1,-1,1) \\ \text{vtcp } \vec{b}(-3,-5,-6) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-1}{6}$$

Đó chính là phương trình chính tắc của đường thẳng (d).

- Tìm toạ độ điểm K đối xứng với A qua (P).

Vì :

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = (d) \end{cases} \Rightarrow \text{K là đối xứng với A qua (d).}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (d). Xác định H

Điểm H∈(d), toạ độ của H(3t+1, 5t-1, 6t+1), từ đó suy ra $\overrightarrow{AH}$ (3t, 5t-3, 6t).

Vì $\overrightarrow{AH} \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow 3.3t+5(5t-3)+6.6t=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{14}$

Vậy toạ độ của $H(\frac{23}{14}, \frac{1}{14}, \frac{32}{14})$.

Điểm K là điểm đối xứng với A qua (P), toạ độ của K được xác định bởi:

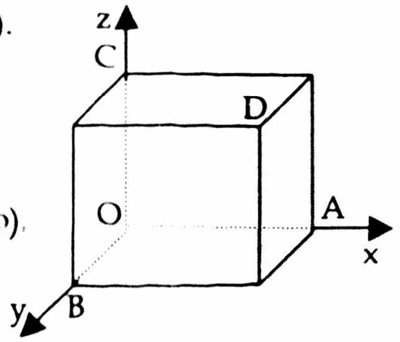
$$\begin{cases} x_K = 2x_H - x_A \\ y_K = 2y_H - y_A \\ z_K = 2z_H - z_A \end{cases} \Rightarrow K(\frac{16}{7}, -\frac{13}{7}, \frac{25}{7}).$$

Bài 4 (ĐHQG, A-98): Cho các điểm A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c) (a, b, c dương). Dựng hình hộp chữ nhật nhận O, A, B, C làm bốn đỉnh và gọi D là đỉnh đối diện với đỉnh O của hình hộp đó.

a. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABD).

b. Tính toạ độ hình chiếu vuông góc của C xuống mặt phẳng (ABD). Tìm điều kiện đối với a, b, c để hình chiếu đó nằm trong mặt phẳng (xOy).

BÀI GIẢI



a. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABD).

Từ giả thiết, D(a, b, c).

- Phương trình mặt phẳng (ABD).

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (ABD), khi đó:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AD} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{BD} \end{cases} \Rightarrow \vec{n}\left(\begin{vmatrix} b & c \\ 0 & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & 0 \\ c & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{vmatrix} \right) = \vec{n}\,(bc, ca, -ab).$$

Mặt phẳng (ABD) được cho bởi:

$$(ABD): \begin{cases} \text{qua } A(a,0,0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(bc, ca, -ab) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (ABD): bc(x-a)+ca.y-ab.z=0 $\Leftrightarrow$ (ABD): bc.x+ca.y-ab.z-abc=0 (1)

- Khoảng cách từ C đến (ABD) được xác định bởi :

$$kc(C,(ABD)) = \frac{|bc.0 + ca.0 - ab.c - abc|}{\sqrt{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}} = \frac{2abc}{\sqrt{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}}.$$

b. Tính toạ độ hình chiếu vuông góc của C xuống mặt phẳng (ABD).

- Gọi (d) là đường thẳng qua C và vuông góc với (ABD), khi đó:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } C(0,0,c) \\ \text{vtcp } \vec{n}(bc, ca, -ab) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = bc.t & (2) \\ y = ca.t & (3) \\ z = c - ab.t & (4) \end{cases}, t \in R.$$

- Hình chiếu vuông góc của C lên (ABD) chính là giao điểm C_1 của (d) và (ABD). Thay (2), (3), (4) vào (1), ta được:

$$bc.bc.t+ca.ca.t-ab.(c-ab.t)-abc=0 \Leftrightarrow t=\frac{2abc}{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}.$$

Thay $t=\frac{2abc}{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}$ vào (2), (3), (4), ta được toạ độ hình chiếu vuông góc của C lên (ABD) là:

$$C_1\left(\frac{2a(bc)^2}{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}, \frac{2b(ac)^2}{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}, \frac{(bc)^2+(ca)^2-(ab)^2}{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}.c\right).$$

- Để hình chiếu đó nằm trong mặt phẳng (xOy), ta phải có :

$$C_1\in(xOy) \Leftrightarrow \frac{(bc)^2+(ca)^2-(ab)^2}{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}.c=0 \Leftrightarrow (bc)^2+(ca)^2-(ab)^2=0.$$

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm toạ độ điểm đối xứng của A(-2, 1, 3) qua (P) cho bởi:

a. (P): 2x+y-z-3=0.

b. (P): $\begin{cases} x=1+t_1-t_2 \\ y=2+2t_1-t_2 \\ z=-1+t_1+t_2 \end{cases}$, $(t_1, t_2\in R)$.

Bài tập 2. (ĐHKTCN - 97) : Cho điểm A(1, 2, 3) và mặt phẳng (P) có phương trình : 2x-y+2z-3=0.

a. Lập phương trình mặt phẳng qua A và song song với (P).

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P). Xác định toạ độ điểm H.

Bài tập 3. (ĐHGTVT TP.HCM - 99) : Cho ba điểm A(1, 1, 2), B(-2, 1, -1), C(2, -2, -1). Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm O lên mặt phẳng (ABC).

Bài tập 4. (ĐHTCKT - 2000) : Cho điểm A(2, 3, 5) và mặt phẳng (P) có phương trình : 2x+3y+z-17=0.

a. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với (P).

b. CMR đường thẳng (d) cắt trục Oz, tìm giao điểm M của chúng.

c. Xác định toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua (P).

Bài tập 5. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng có phương trình:

$$(P): 2x+5y+z+17=0 \text{ và } (d): \begin{cases} 3x-y+4z-27=0 \\ 6x+3y-z+7=0 \end{cases}.$$

a. Xác định toạ độ giao điểm A của (d) và (P).

b. Lập phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với (d) qua (P).

Bài tập 6. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng có phương trình:

$$(P): 2x+y-z+4=0 \text{ và } (d): \begin{cases} x+2y-3=0 \\ 3x-2z-7=0 \end{cases}.$$

a. Xác định toạ độ giao điểm A của (d) và (P).

b. Lập phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với (d) qua (P).

CHỦ ĐỀ 5
HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG LÊN MẶT PHẲNG

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Xác định phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng lên mặt phẳng cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P). Gọi (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d) lên (P). Để xác định (d_1) ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với (P).

Bước 2: Phương trình (d_1) là giao tuyến của (P) và (Q).

Ghi chú: Nếu (P) được cho dưới dạng tham số thì cần thiết chuyển (P) về dạng tổng quát.

Ví dụ 1: Lập phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P), biết:

$$(d): \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 4y + z - 2 = 0 \end{cases} \text{ và } (P): x+y-3z+2=0.$$

Giải.

- Gọi (Q) là mặt phẳng thoả mãn :

  (Q) : ` ``.

  Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng (d) $\Rightarrow$ (Q) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d), có dạng:

  $x+y-2+m(4y+z-2)=0$

  $\Leftrightarrow$ (Q): $x+(1+4m)y+mz-2-2m=0$ (1)

khi đó(Q) có vtpt $\vec{m}$ (1, 1+4m, m).

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (Q), ta có $\vec{n}$ (1, 1, -3).

Vì (P)⊥(Q)

$\Leftrightarrow \vec{m} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{m}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 1.1+(1+4m).1+m(-3)=0 \Leftrightarrow m=-2.$

Thay m=-2 vào (1), được (Q): $x-7y-2z+2=0$.

- Hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) là giao tuyến của (P) và (Q), có :

$$(d_1): \begin{cases} x + y - 3z + 2 = 0 \\ x - 7y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Lập phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P), biết:

$$(d): \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 4y + z - 2 = 0 \end{cases} \text{ và } (P). \begin{cases} x = 1 + t_1 + t_2 \\ y = 2t_1 + t_2 \\ z = 1 + 3t_1 + t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in R).$$

Giải.

- Gọi (Q) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(Q): \begin{cases} (d) \subset (Q) \\ (P) \perp (Q) \end{cases}.$$

Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng (d) ⇒ (Q) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d), có dạng:

$$x+y-2+m(4y+z-2)=0 \Leftrightarrow (Q): x+(1+4m)y+mz-2-2m=0 \quad (1)$$

khi đó (Q) có vtpt $\vec{m}(1, 1+4m, m)$.

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (P), ta có:

$$\vec{n}\left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}(-1, 2, -1).$$

Vì $(P)\perp(Q) \Leftrightarrow \vec{m} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{m}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 1.(-1)+(1+4m).2+ m.(-1)=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{7}$.

Thay $m=-\frac{1}{7}$ vào (1), được (Q): $7x+3y-z-12=0$.

- Chuyển phương trình (P) về dạng tổng quát :

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(1,0,1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1,-2,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 1(x-1)-2(y-0)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow (P): x-2y+z-2=0.$$

- Hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) là giao tuyến của (P) và (Q), có:

$$(d_1): \begin{cases} 7x + 3y - z - 12 = 0 \\ x - 2y + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (ĐHTM-95): Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$$(d): \begin{cases} x - y + z - 5 = 0 \\ 3x - 2y - z + 15 = 0 \end{cases} \quad (P): -2x-3y+z-4=0.$$

Hãy viết phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P).

BÀI GIẢI

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}(3, 4, 1).$$

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (P), ta có: $\vec{n}(-2, -3, 1)$

⇒ $\vec{a}$, $\vec{n}$ không cùng phương.

Vậy (d) không vuông góc với (P).

- Gọi (Q) là mặt phẳng thoả mãn :

$$(Q): \begin{cases}(d) \subset (Q)\\ (P) \perp (Q)\end{cases}.$$

Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng (d) ⇒ (Q) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d), có dạng:

(Q): 3x-2y-z+15+m(x-y+z-5)=0

⇔ (Q): (3+m)x-(2+m)y+(m-1)z+15-5m=0 (1)

khi đó (Q) có vtpt $\overrightarrow{m}$ (3+m, -(2+m), m-1).

- Vì (P)⊥(Q) ⇔ $\overrightarrow{m} \perp \vec{n}$ ⇔ $\overrightarrow{m}.\vec{n}=0$ ⇔ -2(3+m)+3(2+m)+m-1=0 ⇔ m=$\frac{1}{2}$.

- Thay m=$\frac{1}{2}$ vào (1), được (Q): 7x-5y-z+25=0.

- Hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) là giao tuyến của (P) và (Q), có:

$$(d_1): \begin{cases}-2x-3y+z-4=0\\ 7x-5y-z+25=0\end{cases}.$$

Bài 2 (CĐHQ-98): Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$$(d): \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{5} \quad (P): 2x+y+z-8=0.$$

a. Tìm giao điểm A của (d) và (P).

b. Viết phương trình đường thẳng (Δ) là hình chiếu vuông góc của (d) lên (P).

BÀI GIẢI

a. Tìm giao điểm A của (d) và (P).

Chuyển phương trình (d) về dạng tham số, ta được:

$$(d): \begin{cases}x=2t+2\\ y=3t-1\\ z=5t+1\end{cases}, (t\in R).$$

Thay x, y, z theo t vào phương trình của (P), ta được:

2(2t+2)+(3t-1)+(5t+1)-8=0 ⇔ t=$\frac{1}{3}$.

Thay t=$\frac{1}{3}$ vào phương trình tham số của (d), ta được M($\frac{8}{3}$, 0, $\frac{8}{3}$).

b. Gọi $\vec{a}$, $\vec{n}$ theo thứ tự là một vtcp của (d) và vtpt của (P), ta có:

$\vec{a}$ (2, 3, 5); $\vec{n}$ (2, 1, 1) ⇒ $\vec{a}$ và $\vec{n}$ không cùng phương.

Vậy (d) không vuông góc với (P).

Lấy A(2, -1, 1)∈(d).

- Gọi (Q) là mặt phẳng:

$$\begin{cases}(d)\subset(Q)\\ (P)\perp(Q)\end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases}\text{qua } A(2,-1,1)\\ \text{hai vtcp } \vec{a}(2,3,5) \,\&\, \vec{n}(2,1,1)\end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases}\text{qua } A(2,-1,1)\\ \text{vtpt } \vec{n}_1(1,-4,2)\end{cases}$$

⇔ (Q): x-4y+2z-8=0.

- Hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) là giao tuyến của (P) và (Q), có:

$$(\Delta): \begin{cases} 2x + y + z - 8 = 0 \\ x - 4y + 2z - 8 = 0 \end{cases}.$$

Bài 3 (ĐHVH-96): Cho họ đường thẳng (d) biết phương trình:

$$(d): \begin{cases} x - my + z - m = 0 \\ mx + y - mz - 1 = 0 \end{cases}.$$

a. Viết phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của đường thẳng (d) trên mặt phẳng (xOy).

b. CMR khi m thay đổi, (d_1) luôn tiếp xúc với đường tròn cố định trong mặt phẳng (xOy).

BÀI GIẢI

a. Ta có:

Cách 1.

Bằng cách khử z từ phương trình tổng quát cả (d), ta được :

$2mx-(m^2-1)y-m^2-1=0$.

Vậy, phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) trên (xOy) có dạng:

$$(d_1): \begin{cases} 2mx - (m^2 - 1)y - m^2 - 1 = 0 \quad (*) \\ z = 0 \end{cases}.$$

Cách 2.

- Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (xOy).

(Q) chứa đường thẳng (d) $\Rightarrow$ (Q) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d), có dạng:

(Q): $x-my+z-m+t(mx+y-mz-1)=0$

$\Leftrightarrow$ (Q): $(1+tm)x+(-m+t)y+(1-tm)z-m-t=0$ (1)

khi đó (Q) có vtpt $\vec{n}_1(1+tm, -m+t, 1-tm)$.

Vì $(Q)\perp(xOy) \Leftrightarrow (0, 0, 1).\vec{n}_1=0 \Leftrightarrow (1+tm)0+(-m+t)0+(1-tm).1 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{m}$.

Thay $t=\dfrac{1}{m}$ vào (1), được (Q): $2mx-(m^2-1)y-m^2-1=0$.

- Hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) là giao tuyến của (P) và (Q), có:

$$(d_1): \begin{cases} 2mx - (m^2 - 1)y - m^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

b. CMR (d_1) luôn tiếp xúc với đường tròn cố định trong mặt phẳng (xOy).

- Gọi M(x, y) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng (xOy) mà (d_1) không đi qua $\forall m$

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) vô nghiệm với $\forall m$

$\Leftrightarrow$ phương trình $(y+1)m^2-2xm-y+1=0$ vô nghiệm $\forall m \Leftrightarrow x^2+(y^2-1)< 0$.

- Ta đi chứng minh đường tròn (C): $x^2+y^2=1$, luôn tiếp xúc với (d_1). Thật vậy:

Đường tròn (C): $x^2+y^2=1$ có tâm I(0,0) và bán kính R=1. Khi đó:

$$kc(I, (d_1))=\frac{|-m^2-1|}{\sqrt{4m^2+(m^2-1)^2}}=1=R.$$

Vậy, (d_1) luôn tiếp xúc với đường tròn (C): $x^2+y^2=1$ cố định trong (xOy).

Bài 4 (ĐHBK-99): Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(d): \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2} \quad (P): 2x\text{-}2y\text{+}z\text{-}3\text{=}0.$$

a. Tìm toạ độ giao điểm A=(d)∩(P). Tính góc giữa (d) và (P).

b. Viết phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P). Lấy điểm B thuộc đường thẳng (d) sao cho AB=a, với a>0 cho trước. Xét tỷ số $\frac{AB + AM}{BM}$ với M di động trên mặt phẳng (P). Chứng tỏ rằng tồn tại một vị trí của M để tỷ số đó đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất ấy.

BÀI GIẢI

a. Toạ độ giao điểm A=(d)∩(P) là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 2y + z - 3 = 0 \\ \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow A(-2, -1, 5).$$

- Tính sin của góc giữa (d) và (P).
  - Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có: $\vec{a}$ (1, 2, -2).
  - Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (P), ta có: $\vec{n}$ (2, -2, 1).
  - Gọi α góc giữa (d) và (P), khi đó sinα được xác định bởi công thức:

$$\sin\alpha = \frac{|1.2 + 2.(-2) - 2.1|}{\sqrt{(2^2 + (-2)^2 + 1^2)(1^2 + 2^2 + (-2)^2)}} = \frac{4}{9}.$$

b. Viết phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P).

- Chuyển phương trình (d) về dạng tổng quát

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases}.$$

- Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P).

(Q) chứa đường thẳng (d) ⇒ (Q) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d), có dạng:

(Q): 2x-y+3+m(y+z-2)=0

⇔ (Q): 2x+(m-1)y+mz+3-4m=0 (3)

khi đó (Q) có vtpt $\vec{n}_1$(2, (m-1), m).

Vì (Q)⊥(P) ⇔ $\vec{n}.\vec{n}_1$=0 ⇔ 2.2-2(m-1)+m =0 ⇔ m=6.

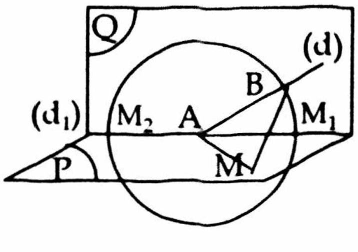
Thay m=6 vào (3), được:

(Q): 2x+5y+6z-21=0.

- Hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) là giao tuyến của (P) và (Q), có:

$$(d_1): \begin{cases} 2x + 5y + 6z - 21 = 0 \\ 2x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}.$$

- Lấy điểm B thuộc đường thẳng (d) sao cho AB=a, và điểm M thuộc (P). Xét ΔABM, ta có:



$$\frac{AB+AM}{BM}=\frac{2R\sin M+2R\sin B}{2R\sin A}=\frac{\sin M+\sin B}{\sin A}$$

$$=\frac{2\sin\frac{M+B}{2}.\cos\frac{M-B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{M-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\le\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\quad(*)$$

Ta biết rằng

$$0<\alpha\le A<\pi \Leftrightarrow 0<\frac{\alpha}{2}\le\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}\le\sin\frac{A}{2}\Rightarrow\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\le\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\quad(1)$$

thay (1) vào (*), ta được:

$$\frac{AB+AM}{BM}\le\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Vậy, tồn tại vị trí của M để tỷ số $\frac{AB+AM}{BM}$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, đạt được khi:

$$\begin{cases}\cos\frac{M-B}{2}=1\\ \sin\frac{A}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{M}=\hat{B}\\ \hat{A}=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow M\in(d_1)\text{: } \Delta ABM \text{ cân tại A với góc } A=\alpha.$$

Dựng M: trong (Q) dựng đường tròn tâm A bán kính R=a, cắt (d_1) tại 2 điểm. M chính là một trong hai giao điểm này.

Bài 5 (ĐHKT 99 & ĐHCĐ 99): Cho hình tứ diện có 4 đỉnh: O(0,0,0); A(6,3,0); B(-2,9,1); S(0,5,8).

a. CMR SB vuông góc với OA.

b. CMR hình chiếu của cạnh SB lên mặt phẳng (OAB) vuông góc với cạnh OA. Gọi K là giao điểm của hình chiếu đó với OA. Hãy xác định toạ độ của K.

c. Gọi P, Q lần lượt là điểm giữa của các cạnh SO, AB. Tìm toạ độ của điểm M trên SB sao cho PQ và KM cắt nhau.

BÀI GIẢI

a. CMR SB vuông góc với OA.

Ta có: $\overrightarrow{SB}(-2, 4, -7)$, $\overrightarrow{OA}(6, 3, 0) \Rightarrow \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{OA}=-2.6+4.3-7.0=0$. Vậy $SB\perp OA$.

b. CMR hình chiếu của cạnh SB lên (OAB) vuông góc với cạnh OA.

Gọi (d_1) là hình chiếu của cạnh SB lên mặt phẳng (OAB), vậy $(d_1)\in(Q)$ là mặt phẳng chứa SB và vuông góc với (OAB).

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (OAB), ta nhận xét rằng:

$$\begin{cases}OA\perp\vec{n}\\ OA\perp SB\end{cases}\Rightarrow OA\perp(Q)\Rightarrow OA\perp(d_1).$$

Gọi K là giao điểm của hình chiếu (d_1) với OA, suy ra:

$$\begin{cases} K \in (OA) \\ BK \perp OA \end{cases}.$$

- Phương trình (OA) được xác định bởi:

$$(OA): \begin{cases} \text{qua } O(0,0,0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{OA}(6,3,0) \end{cases} \Leftrightarrow (OA): \begin{cases} x = 6t & (1) \\ y = 3t & (2) \\ z = 0 & (3) \end{cases}, t \in R.$$

- Vì $K \in (OA)$, nên có toạ độ K(6t, 3t, 0), từ đó $\overrightarrow{BK}$ (6t+2, 3t-9, -1).
- Vì $BK \perp OA \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BK} = 0 \Leftrightarrow 6(6t+2)+3(3t-9)-1.0=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$.

Thay $t=\frac{1}{3}$ vào (1), (2), (3), ta có toạ độ của K(2, 1, 0).

c. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của SO, AB, ta có:

$P(0, \frac{5}{2}, 4)$; $Q(2, 6, \frac{1}{2})$.

Giả sử phương trình mặt phẳng (KPQ) có dạng: ax+by+cz+d=0 (4)

ĐiểmK, P, Q∈(KPQ), ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a + b + d = 0 & (5) \\ \frac{5}{2}b + 4c + d = 0 & (6) \\ 2a + 6b + \frac{1}{2}c + d = 0 & (7) \end{cases}, \text{ từ } \begin{matrix} \left.\begin{matrix}(5)\\(6)\end{matrix}\right\} \Rightarrow 4a - 3b - 8c = 0 \ (8) \\ \left.\begin{matrix}(6)\\(7)\end{matrix}\right\} \Rightarrow 4a - 7b - 7c = 0 \ (9) \end{matrix}$$

từ $\left.\begin{matrix}(8)\\(9)\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 4b-c=0, chọn b=4, ta được :

$$\begin{cases} a = -77 \\ b = 4 \\ c = 16 \\ d = -39 \end{cases}.$$

Thay a, b, c, d vào (4), được (KPQ): 77x-4y+40z-150=0. (11)

Phương trình (SB) được xác định bởi

$$(SB): \begin{cases} \text{qua } O(0,5,8) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{OA}(-2,4,-7) \end{cases} \Leftrightarrow (SB): \begin{cases} x = -2t & (12) \\ y = 5 + 4t & (13) \\ z = 8 - 7t & (14) \end{cases}, t \in R.$$

Điểm M trên SB sao cho PQ và KM cắt nhau, chính là giao điểm của (KPQ) và (SB). Thay (12), (13), (14) vào (11), ta được:

$$77(-2t)-4(5+4t)+40(8-7t)-150=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}.$$

Thay $t=\frac{1}{3}$ vào (12), (13), (14), ta có toạ độ của $M(-\frac{2}{3}, \frac{19}{3}, \frac{17}{3})$.

Bài 6 (ĐHXD-97): Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{3}, \quad (d_2): \begin{cases} 2x - y - 11 = 0 & (1) \\ x - y - z + 5 = 0 & (2) \end{cases}.$$

a. Xác định vtcp của đường thẳng (d_2).

b. CMR hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cùng thuộc một mặt phẳng, viết phương trình mặt phẳng đó.

c. Viết phương trình chính tắc của hình chiếu song song của (d_2) theo phương (d_1) lên mặt phẳng (Q): 3x-2y-2z-1=0.

BÀI GIẢI

a. Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d_2), khi đó:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}\,(1, 2, -1).$$

Vậy ta có một vtcp $\vec{a}\,(1, 2, -1)$ của (d_2).

b. CMR hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cùng thuộc một mặt phẳng.

- Ta sẽ đi chứng minh (d_1) và (d_2) cắt nhau.

  Chuyển phương trình (d_1) về dạng tham số, ta được:

$$(d_1): \begin{cases} x = 5 + 2t & (3) \\ y = 2 + t & (4) \\ z = 6 + 3t & (5) \end{cases}, \ (t \in R).$$

  Thay (3), (4), (5) vào (1), (2) ta được hệ phương trình theo ẩn t:

$$\begin{cases} 2(5+2t) - (2+t) - 11 = 0 \\ (5+2t) - (2+t) - z(6+3t) + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow t=1.$$

  Thay t=1 vào (3), (4), (5) ta được A(7, 3, 9).

  Vậy $(d_1) \cap (d_2) = A(7, 3, 9) \Rightarrow (d_1)$ và (d_2) cùng thuộc một mặt phẳng.

- Viết phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2).

  Gọi $\vec{b}$ là một vtcp của (d_1), ta có $\vec{b}\,(2, 1, 3)$.

  Gọi (P) là mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2).

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(7,3,9) \\ \text{hai vtcp } \vec{a}(1,2,-1) \\ \qquad\qquad \vec{b}(2,1,3) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A(7,3,9) \\ \text{vtpt } \vec{n}(7,-5,-3) \end{cases}$$

  $\Leftrightarrow$ (P): 7x-5y-3z-7=0.

c. Gọi (Δ) hình chiếu song song của (d_2) theo phương (d_1) lên mặt phẳng (Q), khi đó (Δ) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Vậy:

$$(\Delta): \begin{cases} 7x - 5y - 3z - 7 = 0 \\ 3x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}.$$

- Ta chuyển phương trình (Δ) về dạng chính tắc.

Gọi $\vec{c}$ là một vtcp của (Δ), khi đó:

$$\vec{c}\left(\begin{vmatrix}-5 & -3\\ -2 & -2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-3 & 7\\ -2 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}7 & -5\\ 3 & -2\end{vmatrix}\right) = \vec{c}\,(4, 5, 1)$$

Chọn điểm $B(1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) \in (\Delta)$. Vậy:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } B(1,-\frac{3}{2},\frac{5}{2}) \\ \text{vtcp } \vec{c}(4,5,1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x-1}{4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{5} = \frac{z-\frac{5}{2}}{1}.$$

Đó chính là phương trình chính tắc của (Δ).

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. (ĐHQG TPHCM/A đợt 2-98): Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn Oxyz, cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$$(d): \begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases} \quad (P): x+y+z-3=0.$$

Lập phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên (Q).

Bài tập 2. Lập phương trình hình chiếu vuông góc của giao tuyến (d) của hai mặt phẳng 3x-y+z-2=0 và x+4y-5=0 lên mặt phẳng 2x-z+7-0.

Bài tập 3. (ĐHMĐC-98): Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn Oxyz cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$$(d): \frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2} \qquad (P): x-y+3z+8=0.$$

Hãy viết phương trình chính tắc hình chiếu vuông góc của (d) lên (P).

Bài tập 4. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (Q) biết:

$$(d): \begin{cases} 3x - 2y + z - 3 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad (Q): \begin{cases} x = 4 + 3t_1 + t_2 \\ y = 4 + t_1 - 2t_2 \\ z = -5 - t_1 + t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in R).$$

Lập phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên (Q).

Bài tập 5. (ĐHCĐ/chưa phân ban-99): Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$$(d): \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 3 = 0 \end{cases} \quad (P): x-y+z+10=0.$$

Hãy viết phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P).

Bài tập 6. (ĐH Cần thơ/D-98): Trong không gian với hệ toạ độ vuông góc Oxyz cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(P): x+y+z+1=0,\ (d): \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

Hãy viết phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P).

Bài tập 7. (HVQY - 95): Trong không gian với hệ toạ độ vuông góc Oxyz cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(P): x+y+z+1=0,\ (d): \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

a. Hãy viết phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (Oxy).
b. CMR khi m thay đổi, đường thẳng (d_1) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định trong mặt phẳng Oxy.

Bài tập 8. (ĐHQG TP.HCM - 98): Trong không gian với hệ toạ độ vuông góc Oxyz cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình:

$$(P): x+y-z+1=0,$$

$$(d_1): \begin{cases} 2y-z+1=0 \\ x+2y=0 \end{cases},\ (d_2): \begin{cases} 3y-z+12=0 \\ x-z+2=0 \end{cases}$$

a. Hãy viết phương trình hình chiếu vuông góc (Δ_1), (Δ_2) của (d_1), (d_{22}) lên mặt phẳng (P). Tìm toạ độ giao điểm I của (Δ_1), (Δ_2).
b. Viết phương trình mặt phẳng (P_1) chứa (d_1) và vuông góc với (P).

CHỦ ĐỀ 6

HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC CỦA ĐIỂM LÊN ĐƯỜNG THẲNG

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Tìm toạ độ hình chiếu của một điểm lên một đường thẳng.

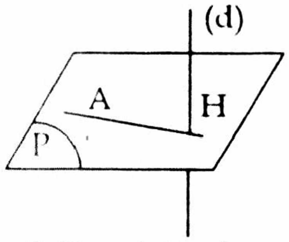
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho điểm $A(x_A, y_A, z_A)$ và đường thẳng (d) ($A \notin (d)$), để xác định hình chiếu vuông góc H của A lên (d) ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với (d) (t.l: (P) qua A và có vtpt là vtcp của (d)).

Bước 2: Toạ độ giao điểm H của (P) và (d) chính là hình chiếu vuông góc của A lên (d).



Cách 2: (Thường áp dụng khi (d) cho dưới dạng tham số) Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định một vtcp $\vec{a}$ của đường thẳng (d).

Bước 2: $H \in (d)$, vậy toạ độ H thoả mãn phương trình tham số của (d). Suy ra toạ độ $\overrightarrow{AH}$.

Bước 3: H là hình chiếu vuông góc của A xuống (d) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{a} = 0$ (1)

Bước 4: Từ (1), ta xác định được giá trị tham số, thay vào phương trình tham số của (d), ta được toạ độ điểm H.

Ghi chú: Nếu đường thẳng (d) cho dưới dạng chính tắc thì chuyển nó về dạng tham số.

Bài toán 2: Tìm điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng (d).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua (d). Để xác định toạ độ A_1, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d).

Bước 2: Với điều kiện H là trung điểm AA_1, ta xác định được toạ độ A_1.

Bài toán 3: Xác định phương trình đường thẳng đối xứng với một đường thẳng cho trước qua một đường thẳng cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (Δ). Gọi (d_1) là đường thẳng đối xứng với (d) qua (Δ). Để xác định (d_1) ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lấy hai điểm A, B phân biệt thuộc (d).

Bước 2: Xác định toạ độ các điểm A_1, B_1 đối xứng với A, B qua (Δ).

Bước 3: (d_1) chính là đường thẳng đi qua A_1, B_1.

Ví dụ 1: Cho điểm A(1, 2, -1) và đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d): \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d). Từ đó tìm toạ độ điểm , A_1 đối xứng với A qua (d).

Giải.

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right) = \vec{a}\ (0, -1, 1)$$

Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn :

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (P) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A(1,2,-1) \\ \text{vtpt } \vec{a}(0,-1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): y-z-3=0.$$

Goi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d). Ta có $H=(d)\cap(P)$, toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow H(2, 2, -1).$$

Giả sử $A_1(x_1, y_1, z_1)$. Vì H là trung điểm AA_1, ta có:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_H - x_A \\ y_1 = 2y_H - y_A \\ z_1 = 2z_H - z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \\ z_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow A_1(3, 2, -1).$$

Ví dụ 2: Cho điểm A(1, 2, -1) và đường thẳng (d) có phương trình

$$(d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}, (t\in R).$$

Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d). Từ đó tìm toạ độ điểm , A_1 đối xứng với A qua (d).

Giải.

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có: $\vec{a}$ (-1, 1, 0).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (d) $\Rightarrow H\in(d)$ do đó:

$H(1-t, t, -1) \Rightarrow \overrightarrow{AH}\ (-t, t-2, 0)$.

Vì $\overrightarrow{AH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow -t(-1)+t-2=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(0, 1, -1)$.

Giả sử $A_1(x_1, y_1, z_1)$. Vì H là trung điểm AA_1, ta có:

$$\begin{cases} x_H = \dfrac{x_1 + x_A}{2} \\ y_H = \dfrac{y_1 + y_A}{2} \\ z_H = \dfrac{z_1 + z_A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_H - x_A \\ y_1 = 2y_H - y_A \\ z_1 = 2z_H - z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = -1 \end{cases}.$$

Vậy $A_1(-1, 0, -1)$.

II. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (ĐHBK-97): Cho điểm M(1, 2, -1) và (d): $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}$.

Gọi N là điểm đối xứng của điểm M qua đường thẳng (d). Tính độ dài đoạn MN.

BÀI GIẢI

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có $\vec{a}$ (3, -2, 2).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (d).

- Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, (t \in R).$$

- Xác định H: vì $H \in (d) \Rightarrow H(3t-1, -2t+2, 2t+2)$ và $\overrightarrow{MH}$ (3t-2, -2t, 2t+3).

Vì $MH \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 3(3t-2)-2(-2t)+2(2t+3)=0 \Leftrightarrow t=0$.

Vậy $\overrightarrow{MH}$ (-2, 0, 3).

- Ta có $MN = 2|\overrightarrow{MH}| = 2\sqrt{13}$.

Bài 2 (ĐHTM-99): Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình

$$\begin{cases} 2x - y - 2z - 3 = 0 \\ 2x - 2y - 3z - 17 = 0 \end{cases}, (P): x-2y+z-3=0.$$

a. Tìm điểm đối xứng của điểm A(3, -1, 2) qua đường thẳng (d).

b. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) trên mặt phẳng (P).

BÀI GIẢI

a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (d).

- Xác định H.

Gọi $\vec{a}$ là vtcp của (d), ta có:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}\ (-1, 2, -2).$$

Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với (d), ta có:

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } A(3,-1,2) \\ \text{vtpt } \vec{a}_1(-1,2,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x-2y+2z-9=0.$$

Điểm $H = (d) \cap (Q)$, vậy toạ độ của H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z - 3 = 0 \\ 2x - 2y - 3z - 17 = 0 \\ x - 2y + 2z - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(-7, -11, -3).$$

- Gọi K là điểm đối xứng với A qua (d), toạ độ của K được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_K = 2x_H - x_A \\ y_K = 2y_H - y_A \\ z_K = 2z_H - z_A \end{cases} \Rightarrow K(-17, -21, -8).$$

b. Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (P), ta có $\vec{n}$ (1, -2, 1).

Gọi (R) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P), ta có:

$$(R): \begin{cases} \text{qua } H(-7,-11,-3) \\ \text{hai vtcp } \vec{n}(1,-2,1) \\ \qquad \vec{a}(-1,2,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (R): \begin{cases} \text{qua } H(-7,-11,-3) \\ \text{vtpt } \vec{m}(2,1,0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (R): $2x+y+25=0$.

Gọi (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d) lên (P) $\Rightarrow$ (d_1)=(P)$\cap$(R), có dạng:

$$(d_1): \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + y + 25 = 0 \end{cases}.$$

Bài 3 (ĐHBK Hà nội-98): Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình là:

$$(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}, t \in R; (P): 2x-y-2z+1=0.$$

a. Tìm toạ độ các điểm thuộc đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ mỗi điểm đó đến mặt phẳng (P) bằng 1.

b. Gọi K là điểm đối xứng của điểm I(2, -1, 3) qua đường thẳng (d). Xác định toạ độ K.

BÀI GIẢI

a. Điểm A$\in$(d), suy ra: A(1+2t, 2-t, 3t).

Khoảng cách từ A tới (P), được cho bởi:

$$d(A, (P)) = \frac{|2(1+2t) - (2-t) - 2.3t + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|t-1|}{3}.$$

Do đó:

$$d(A, (P)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|t-1|}{3} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 4 \\ t_2 = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A_1(9,-2,12) \\ A_2(-3,4,-6) \end{array}\right..$$

Vậy tồn tại hai điểm A_1, A_2 thuộc (d) mà khoảng cách từ nó đến (P) bằng 1.

b. Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có $\vec{a}$ (2, -1, 3).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (d).

- Xác định H.

Điểm H$\in$(d) $\Rightarrow$ H(2t+1, 2-t, 3t) & $\overrightarrow{IH}$ (2t-1, 3-t, 3t-3).

Vì IH$\perp$(d) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{IH} \perp \vec{a}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{IH}.\vec{a} = 0$ $\Leftrightarrow$ 2(2t-1)-(3-t)+3(3t-3)=0 $\Leftrightarrow$ t=1.

Vậy toạ độ của H(3,1,3).

- Điểm K là điểm đối xứng với I qua (d), suy ra:

$$\begin{cases} x_K = 2x_H - x_I \\ y_K = 2y_H - y_I \\ z_K = 2z_H - z_I \end{cases} \Rightarrow K(4, 3, 3).$$

Bài 4 (ĐHCĐ-98): Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình là:

$$(d_1): \begin{cases} 2x - 3y - 2 = 0 \\ x + 3z + 2 = 0 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} 2x - 3y + 9 = 0 \\ y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

a. CMR $(d_1)//(d_2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2).

b. Tìm toạ độ điểm N đối xứng của điểm M(-2, 3, -4) qua đường thẳng (d_1).

BÀI GIẢI

a. CMR $(d_1)//(d_2)$.

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(3, 2, -1)$; $\vec{a}_2(3, 2, -1) \Rightarrow \vec{a}_1 // \vec{a}_2$.

Lấy A(-2, -2, 0), nhận thấy:

$$\begin{cases} A \notin (d_2) \\ A \in (d_1) \end{cases}.$$

Vậy: $(d_1)//(d_2)$.

- Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2).

Cách 1. Mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

$$\Leftrightarrow (P): \begin{cases} (d_1) \subset (P) \\ A \in (P) \end{cases}.$$

Vì $(d_1) \subset (P) \Rightarrow$ (P) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d) có dạng:

(P): $2x-3y-2+m(x+3z+2)=0$

$\Leftrightarrow$ (P): $(2+m)x-3y+3mz+1-m=0$ (1)

Điểm $A(-2, -2, 0) \in (P) \Leftrightarrow m=-\dfrac{11}{4}$

Thay $m=-\dfrac{11}{4}$ vào (1) được (P): $x+4y+11z+10=0$.

Cách 2. Sử dụng tích hỗn tạp.

Điểm $M(x, y, x) \in (P) \Leftrightarrow D(\overrightarrow{AM}, \vec{a}_1, \vec{a}_2)=0 \Leftrightarrow x+4y+11z+10=0$ (*)

Đó chính là phương trình tổng quát của (P).

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (d).

- Xác định H.

- Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua M và vuông góc với (d_1).
- Điểm $H=(d_1) \cap (Q) \Rightarrow$ toạ độ của H là nghiệm của hệ tạo bởi (d_1) và (Q) $\Rightarrow H(1, 0, -1)$.

- Điểm N là điểm đối xứng với M qua (d_1), suy ra:

$$\begin{cases} x_N = 2x_H - x_M \\ y_N = 2y_H - y_M \\ z_N = 2z_H - z_M \end{cases} \Rightarrow N(4, -3, 2).$$

Bài 5 (HVNH TPHCM -99): Cho 4 điểm A(-1, 3, 2); B(4, 0, -3); C(5, -1, 4) và D(0, 6, 1).

a. Viết phương trình tham số của đường thẳng BC. Hạ AH⊥BC. Tìm toạ độ của điểm H.

b. Viết phương trình tổng quát của (BCD). Tìm khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

BÀI GIẢI

a. Phương trình tham số của đường thẳng BC được cho bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{qua } B(4,0,-3) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{BC}(1,-1,7) \end{cases} \Leftrightarrow (BC): \begin{cases} x = 4 + t & (1) \\ y = -t & (2) \\ z = -3 + 7t & (3) \end{cases}, (t \in R).$$

- Xác định H.

Vì $H \in (BC)$, nên có toạ độ H(4+t, -t, -3+7t) và $\overrightarrow{AH}$ (5+t, -3-t, 7t-5).

Vì $AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 1(5+t)-(-3-t)+7(7t-5)=0 \Leftrightarrow t=\frac{9}{17}$.

$\Rightarrow H(\frac{77}{17}, -\frac{9}{17}, \frac{12}{17})$.

b. Phương trình mặt phẳng (BCD).

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (BCD), khi đó:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{BD}(-4,6,4) \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{BC}(1,-1,7) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}\left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}\,(23, 16, -1).$$

Do đó :

$$(BCD): \begin{cases} \text{qua } B(4,0,-3) \\ \text{vtpt } \vec{n}(23,16,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (BCD): 23x+16.y-z-95=0.$$

Khoảng cách từ A đến (BCD) được xác định bởi:

$$h = \frac{|23(-1) + 16.3 - 2 - 95|}{\sqrt{23^2 + 16^2 + (-1)^2}} = \frac{72}{\sqrt{786}}.$$

Bài 6 (ĐHTM-96): Cho điểm A(2, 3, -1) và đường thẳng (d) có phương trình: $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{1}$.

Lập phương trình đường thẳng qua A vuông góc với (d) và cắt (d).

BÀI GIẢI

Gọi (d_1) là đường thẳng qua A vuông góc với (d) và cắt (d), vậy (d_1) qua A và H (H là hình chiếu vuông góc của A lên (d)).

- Xác định H.

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có: $\vec{a}$ (2, 4, 1).

Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = 3 + t \end{cases}, (t \in R).$$

Vì $H \in (d)$, nên có toạ độ H(2t, 4t, 3+t).Ta có $\overrightarrow{AH}$ (2t-2, 4t-3, 4+t).

Vì $AH \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-2)+4(4t-3)+4+t=0 \Leftrightarrow t=\frac{4}{7} \Rightarrow H(\frac{8}{7}, \frac{16}{7}, \frac{25}{7})$.

- Phương trình (d_1), được xác định bởi:

$$\begin{cases} \text{qua } A(2,3,-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{HA}(\frac{6}{7},\frac{5}{7},-\frac{32}{7}) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x-2}{6}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+1}{-32}.$$

Chú ý. Có thể xác định được phương trình (d_1) bằng cách:

Dựng $(P_1): \begin{cases} \text{qua } A \\ (P_1)\perp(d) \end{cases}$ và $(P_2): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d)\subset(P_2) \end{cases}$.

Khi đó $(d_1)=(P_1)\cap(P_1)$.

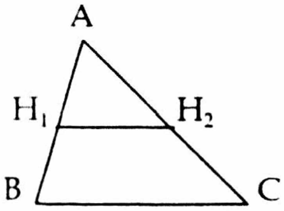
Bài 7 (ĐHHH/TPHCM-99): Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng (d_1), (d_2):

$$(d_1): \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \quad (d_2): \begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=4+5t \end{cases}, (t\in R).$$

a. (d_1), (d_2) có cắt nhau hay không?

b. Gọi B, C lần lượt là các điểm đối xứng của A(1,0,0) qua (d_1), (d_2). Tính diện tích ΔABC.

BÀI GIẢI



a. Thay x, y, z của (d_2) vào phương trình (d_1), ta được:

$$\begin{cases} 2t+1+2t+1=0 \\ t-(1+2t)+4+5t-1=0 \end{cases} \Rightarrow t=-\frac{1}{2}.$$

Vậy (d_1) và (d_2) cắt nhau tại I(-1/2, 0, 3/2).

b. Tính diện tích ΔABC.

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là một vtcp của đường thẳng (d_1) và (d_2), ta có:

$$\vec{a}_1\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_1(1,-2,-3) \text{ và } \vec{a}_2(1,2,5)$$

- Gọi H_1 là hình chiếu vuông góc của A lên (d_1). Xác định H_1.

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với (d_1), ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(1,0,0) \\ \text{vtpt } \vec{a}_1(1,-2,-3) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x-1-2y-3z=0 \Leftrightarrow (P): x-2y-3z-1=0.$$

Điểm $H_1=(d_1)\cap(P)$, toạ độ của H_1 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-y+z-1=0 \\ x-2y-3z-1=0 \end{cases} \Rightarrow H_1(-\frac{1}{14}, -\frac{12}{14}, \frac{3}{14}) \Rightarrow \overrightarrow{AH_1}(-\frac{15}{14}, -\frac{12}{14}, \frac{3}{14}).$$

- Gọi H_2 là hình chiếu vuông góc của A lên (d_1). Xác định H_2.

Điểm $H_2\in(d_2) \Rightarrow H_2(t, 1+2t, 4+5t)$ và $\overrightarrow{AH_2}(t-1, 1+2t, 4+5t)$.

Vì $AH_2\perp(d_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH_2}\perp\vec{a}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AH_2}.\vec{a}_2=0 \Leftrightarrow t-1+2(1+2t)+5(4+5t)=0 \Leftrightarrow t=-\frac{7}{10}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH_2}(-\frac{17}{10}, -\frac{4}{10}, -\frac{5}{10}).$$

- Diện tích ΔABC, được xác định bởi công thức:

$$S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\hat{A} = \frac{1}{2}.2AH_1.2AH_2.\sin\hat{A} = 2\,AH_1.AH_2.\sin\hat{A}$$

$$= 2\,|[\overrightarrow{AH_1}, \overrightarrow{AH_2}]| = \frac{\sqrt{5904}}{35}.$$

Bài 8 (ĐHTM-98): Cho mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A(0, 0, 1), B(-1, -2, 0) và C(2, 1, -1).

a. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P).

b. Viết phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua trọng tâm của ΔABC và vuông góc với mặt phẳng (P).

c. Xác định chân đường cao hạ từ A xuống BC và tính thể tích tứ diện OABC.

BÀI GIẢI

a. Mặt phẳng (P) có một cặp vtcp :

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}(-1,-2,-1)\\ \overrightarrow{AC}(2,1,-2)\end{cases}.$$

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (P), khi đó:

$$\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\left(\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right)=\vec{n}\,(5,-4,3).$$

Khi đó phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) được cho bởi :

$$(P):\begin{cases}\text{qua } A(0,0,1)\\ \text{vtpt } \vec{n}(5,-4,3)\end{cases} \Leftrightarrow (P): 5x-4y+3(z-1)=0 \Leftrightarrow (P): 5x-4y+3z-3=0.$$

b. Gọi $G(x_G, y_G, z_G)$ là trọng tâm ΔABC, khi đó:

$$G:\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}x_G=1/3\\ y_G=-1/3\\ z_G=0\end{cases} \Leftrightarrow G(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},0).$$

Đường thẳng (d) đi qua trọng tâm G và vuông góc với (P), được cho bởi:

$$(d):\begin{cases}\text{qua } G(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},0)\\ \text{vtcp } \vec{n}(5,-4,3)\end{cases} \Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}+5t\\ y=-\dfrac{1}{3}-4t\\ z=3t\end{cases},\ (t\in R).$$

c. Xác định chân đường cao hạ từ A xuống BC .

Phương trình (BC) dc cho bởi:

$$(BC):\begin{cases}\text{qua } B(-1,-2,0)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{BC}(3,3,-1)\end{cases} \Leftrightarrow (BC):\begin{cases}x=-1+3t & (1)\\ y=-2+3t & (2)\\ z=-t & (3)\end{cases},\ (t\in R).$$

Gọi H là chân đường cao hạ từ A xuống BC. Ta có thể xác định toạ độ của H theo hai cách:

Cách 1. Vì H∈BC ⇒ H(-1+3t, -2+3t, -t) và $\overrightarrow{AH}$ (-1+3t, -2+3t, -t-1).

Vì AH⊥BC ⇔ $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$ ⇔ 3(-1+3t)+3(-2+3t)-(-t-1)=0 ⇔ 19t-8=0 ⇔ $t=\dfrac{8}{19}$.

$$\Rightarrow H(\frac{5}{19},-\frac{14}{19},-\frac{8}{19}).$$

Cách 2. Gọi (R) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC

$$(R):\begin{cases}\text{qua } A(0,0,1)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{BC}(3,3,-1)\end{cases} \Leftrightarrow (R): 3x+3y-(z-1=0) \Leftrightarrow (R): 3x+3y-z+1=0 \quad (4)$$

Điểm H=(BC)∩(R), vậy thay (1), (2), (3) vào (4), ta được:

$$3(-1+3t)+3(-2+3t)-(-t)+1=0 \Leftrightarrow t=\frac{8}{19} \Rightarrow H(\frac{5}{19}, -\frac{14}{19}, -\frac{8}{19}).$$

- Tính thể tích tứ diện OABC.

Gọi d là khoảng cách từ O đến (ABC), khi đó:

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.d = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AH.BC.d \quad (5)$$

trong đó:

$$d=\frac{|-3|}{\sqrt{5^2+4^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{50}}=\frac{3\sqrt{2}}{10} \quad (6)$$

$$AH=\sqrt{\left(\frac{5}{19}\right)^2+\left(-\frac{14}{19}\right)^2+\left(-\frac{8}{19}-1\right)^2}=\frac{5\sqrt{38}}{19} \quad (7)$$

$$BC=\sqrt{3^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{19} \quad (8)$$

Thay (6), (7), (8) vào (5), ta được:

$$V=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{5\sqrt{38}}{19}.\sqrt{19}.\frac{3\sqrt{2}}{10}=\frac{1}{2} \text{ (đvdt).}$$

Bài 9 (ĐHSP I-94): Cho đường thẳng (d) có phương trình

$$(d):\begin{cases}x-z=0\\ y=0\end{cases}.$$

a. Với mỗi điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ hãy viết phương trình mặt phẳng (P_0) đi qua điểm M_0 và vuông góc với (d).

b. Tìm toạ độ giao điểm H_0 của (P_0) với (d) và tính khoảng cách M_0H_0.

c. CMR quỹ tích các điểm trong mặt phẳng xOy mà khoảng cách đến (d) bằng 2 là một Elíp. Xác định toạ độ các tiêu điểm của nó.

BÀI GIẢI

a. Gọi $\vec{a}$ là vtcp của (d), ta có:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right)=\vec{a}\,(1, 0, 1).$$

Mặt phẳng (P_0) đi qua điểm M_0 và vuông góc với (d), vậy:

$$(P_0):\begin{cases}\text{qua } M_0(x_0, y_0, z_0)\\ \text{vtpt } \vec{a}(1,0,1)\end{cases} \Leftrightarrow (P_0): x-x_0+z-z_0=0 \Leftrightarrow (P_0): x+z-x_0-z_0=0.$$

b. Toạ độ giao điểm H_0 của (P_0) với (d) là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+z-x_0-z_0=0\\ x-z=0\\ y=0\end{cases} \Rightarrow H_0\left(\frac{x_0+z_0}{2}, 0, \frac{x_0+z_0}{2}\right)$$

Tính khoảng cách M_0H_0.

$$M_0H_0 = \sqrt{(\frac{x_0+z_0}{2} - x_0)^2 + y_0^2 + (\frac{x_0+z_0}{2} - z_0)^2} = \sqrt{\frac{(x_0-z_0)^2}{2} + y_0^2}.$$

c. Vì $M \in (xOy) \Rightarrow M(x, y, 0)$. Khi đó, với giả thiết kc(M, (d)=2, ta có:

$$\sqrt{\frac{x^2}{2} + y^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Vậy, quỹ tích các điểm trong mặt phẳng (xOy) mà khoảng cách đến (d) bằng 2 là một Elíp (E): $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ với các tiêu điểm $F_1(-2, 0)$ và $F_1(2, 0)$.

Bài 10 (HVBCVT - 2000): Cho hai đường thẳng (Δ) và (d) có phương trình:

$$(\Delta): \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}, (d): \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}.$$

Lập phương trình đường thẳng qua (d_1) đối xứng với (d) qua (Δ).

BÀI GIẢI

Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = t + 7 \\ y = 2t + 3 \\ z = -t + 9 \end{cases}, (t \in R).$$

Lấy hai điểm A(7, 3, 9), B(6, 1, 10)∈(d). Gọi H_A, H_B theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B lên (Δ).

- Xác định H_A và A_1 là điểm đối xứng với A qua (Δ)

Chuyển phương trình đường thẳng (Δ) về dạng tham số:

$$(\Delta): \begin{cases} x = -7t + 3 \\ y = 2t + 1 \\ z = 3t + 1 \end{cases}, (t \in R).$$

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (Δ), ta có: $\vec{a}(-7, 2, 3)$.

$H_A \in (\Delta)$ do đó: $H_A(3-7t, 1+2t, 1+3t) \Rightarrow \overrightarrow{AH_A}(-4-7t, -2+2t, -8+3t)$.

Vì $\overrightarrow{AH_A} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH_A}.\vec{a} = 0$

$\Leftrightarrow -7(-4-7t)+2(-2+2t)+3(-8+3t)=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow H_A(3, 1, 1)$.

Giả sử $A_1(x_1, y_1, z_1)$. Vì H_A là trung điểm AA_1, ta có:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_{H_A} - x_A \\ y_1 = 2y_{H_A} - y_A \\ z_1 = 2z_{H_A} - z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = -1 \\ z_1 = -7 \end{cases} \Rightarrow A_1(-1, -1, -7).$$

- Xác định H_B và B_1 là điểm đối xứng với B qua (Δ)

Gọi (Q) là mặt phẳng thoả mãn :

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } B \\ (Q) \perp (\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } B(6,1,10) \\ \text{vtpt } \vec{a}(-7,2,3) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): -7x+2y+3z+10=0.$$

Ta có $H_B=(\Delta)\cap(Q)$. Bằng cách thay phương trình tham số của (Δ) vào phương trình (Q), ta được:

$$t=\frac{3}{31} \Rightarrow H_B(\frac{72}{31},\frac{37}{31},\frac{40}{31}).$$

Giả sử $B_1(x_2, y_2, z_2)$. Vì H_B là trung điểm BB_1, ta có:

$$\begin{cases} x_2 = 2x_{H_B} - x_B \\ y_2 = 2y_{H_B} - y_B \\ z_2 = 2z_{H_B} - z_B \end{cases} \Rightarrow B_1(-\frac{42}{31},\frac{43}{31},-\frac{230}{31}).$$

- Phương trình đường thẳng (d_1) được cho bởi :

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } A_1(-1,-1,-7) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{A_1B_1}(-11,74,-13) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x+1}{-11}=\frac{y+1}{74}=\frac{z+7}{-13}.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho điểm A(1, 2, 3) và đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d): \begin{cases} x - 2y - 2z + 9 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d). Từ đó tìm toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua (d).

Bài tập 2. Cho điểm A(1, 2, -1) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases}, (t\in R).$$

Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d). Từ đó tìm toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua (d).

Bài tập 3. Cho điểm A(2, 1, -3) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-1}.$$

Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d). Từ đó tìm toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua (d).

Bài tập 4. (ĐH Huế/A&B phân ban-98): Trong không gian Oxyz cho điểm A(2, -1, 1) và đường thẳng (d) có phương trình là:

$$(d): \begin{cases} y + z - 4 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases}.$$

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với (d).

b. Xác định toạ độ điểm B đối xứng với A qua (d).

Bài tập 5. (Đề 60-Va): Lập phương trình đường thẳng qua A(3, 2, 1) và vuông góc với đường thẳng $\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z+3}{1}$ và cắt đường thẳng đó.

Bài tập 6. (ĐHTM 2000): Lập phương trình đường thẳng qua A(2, -1, 0) vuông góc và cắt đường thẳng:

$$(d): \begin{cases} 5x + y + z + 2 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Bài tập 7. Trong không gian Oxyz cho bốn đường thẳng (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) có phương trình :

$$(d_1): \begin{cases} mx - y = 0 \\ z = h \end{cases}, (d_2): \begin{cases} mx - y = 0 \\ z = -h \end{cases}, (d_3): \begin{cases} mx + y = 0 \\ z = h \end{cases}, (d_4): \begin{cases} mx + y = 0 \\ z = -h \end{cases}.$$

CMR các điểm đối xứng A_1, A_2, A_3, A_4 của A bất kỳ trong không gian qua (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) là đồng phẳng. Lập phương trình mặt phẳng chứa chúng.

CHỦ ĐỀ 7
ĐIỂM VÀ MẶT PHẲNG

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Cho hai điểm $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ và mặt phẳng (P): $ax+by+cz+d=0$. Tìm điểm $M\in(P)$ sao cho MA+MB nhỏ nhất.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tìm điểm $M\in(P)$ sao cho MA+MB nhỏ nhất, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định vị trí tương đối của hai điểm A, B đối với mặt phẳng (P) bằng cách tính:

$$t_A = ax_A+by_A+cz_A+d \text{ và } t_B = ax_B+by_B+cz_B+d.$$

- Nếu $t_A.t_B < 0 \Leftrightarrow$ A, B khác phía đối với (P). Thực hiện bước 2.
- Nếu $t_A.t_B > 0 \Leftrightarrow$ A, B cùng phía đối với (P). Thực hiện bước 3.

Bước 2: Viết phương trình tham số của đường thẳng (AB).

- Tìm toạ độ giao điểm N của (AB) và (P). Thực hiện bước 4.

Bước 3: Tìm toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua (P).

- Viết phương trình tham số của đường thẳng (A_1B).
- Tìm toạ độ giao điểm N của (A_1B) và (P). Thực hiện bước 5.

Bước 4: Ta đi chứng minh rằng MA+MB nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv N$.

Thật vậy:

Lấy điểm $M\in(P)$ ta có: $MA+MB\geq AB=NA+NB$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $M\equiv N$.

Bước 5: Ta đi chứng minh rằng MA+MB nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv N$.

Thật vậy:

Lấy điểm M bất kỳ thuộc (P) ta có:

$$MA+MB= MA_1+MB \geq A_1B=NA_1+NB=MA_1+MB.$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $M\equiv N$.

Cách 2: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định vị trí tương đối của hai điểm A, B đối với mặt phẳng (P) bằng cách tính:

$$t_A = ax_A+by_A+cz_A+d \text{ và } t_B = ax_B+by_B+cz_B+d.$$

- Nếu $t_A.t_B < 0 \Leftrightarrow$ A, B khác phía đối với (P).
- Nếu $t_A.t_B > 0 \Leftrightarrow$ A, B cùng phía đối với (P).

Bước 2: Tìm toạ độ các điểm A_1, B_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc góc của A, B lên (P).

Bước 3: Tính các độ dài AA_1, BB_1, từ đó suy ra toạ độ điểm N chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1}$ (t.l $\frac{\overrightarrow{NA_1}}{\overrightarrow{NB_1}} = -\frac{AA_1}{BB_1}$).

Bước 4: Chứng minh rằng MA+MB nhỏ nhất khi và chỉ khi M≡N. Chia hai trường hợp:

Trường hợp 1: $t_A.t_B < 0$.

Vì điểm N chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1} \Rightarrow$ A, B, N thẳng hàng. Vậy: MA+MB≥AB=NA+NB.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi M≡N.

Trường hợp 2: $t_A.t_B > 0$

Gọi A_2 là điểm đối xứng của A qua (P).

Vì điểm N chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1} \Rightarrow A_2$, B, N thẳng hàng. Vậy: $MA+MB = MA_2+MB \geq A_2B=NA+NB$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi M≡N.

Chú ý. Phương pháp trên cũng được sử dụng để tìm M∈(P) sao cho MA-MB| lớn nhất.

Ví dụ 1. Cho hai điểm A(1, 1, 2); B(2, 1, -3) và mặt phẳng (P): 2x+y-3z-5=0. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho AM+BM nhỏ nhất.

Giải.

Cách 1.

- Xét vị trí tương đối của A, B đối với (P), ta có:

$t_A.t_B$=(2.1+1-3.2-5).(2.2+1-3(-3)-5)=-8.9=-72<0

Vậy A, B khác phía đối với (P).

- Phương trình (AB) được xác định bởi:

$$\begin{cases} \text{qua } A(1,1,2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(1,0,-5) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 2 - 5t \end{cases}, (t \in R).$$

- Gọi N=(AB)∩(P), khi đó để tìm toạ độ N ta thay x, y, z từ phương trình tham số của (AB) vào phương trình của (P) được:

$$2(1+t)+1-3(2-5t)-5=0 \Leftrightarrow t=8/17 \Rightarrow N(\frac{25}{17}, 1, -\frac{6}{17}).$$

- Ta đi chứng minh rằng MA+MB nhỏ nhất ⇔ M≡N. Thật vậy:

Lấy điểm M∈(P) ta có: MA+MB≥AB=NA+NB.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi M≡N.

Vậy điểm $M(\frac{25}{17}, 1, -\frac{6}{17})$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2.

- Xét vị trí tương đối của A, B đối với (P), ta có:

$t_A.t_B$=(2.1+1-3.2-5).(2.2+1-3(-3)-5)=-8.9=-72<0

Vậy A, B khác phía đối với (P).

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (P), ta có $\vec{n}$ (2, 1, -3)

- Gọi A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên (P).

Phương trình (AA_1) được xác định bởi

$$(AA_1): \begin{cases} \text{qua } A(1,1,2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,1,-3) \end{cases} \Leftrightarrow (AA_1): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, (t \in R).$$

Vậy $A_1 = (AA_1) \cap (P)$ khi đó để tìm toạ độ A_1 ta thay x, y, z từ phương trình tham số của (AA_1) vào phương trình của (P) được:

$$2(1+2t)+1+t-3(2-3t)-5=0 \Leftrightarrow t=4/7 \Rightarrow A_1(-\frac{15}{7}, \frac{11}{7}, \frac{2}{7}).$$

- Gọi B_1 là hình chiếu vuông góc của B lên (P).

Phương trình (BB_1) được xác định bởi:

$$(BB_1): \begin{cases} \text{qua } A(2,1,-3) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,1,-3) \end{cases} \Leftrightarrow (BB_1): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases}, (t \in R).$$

Vậy $B_1 = (BB_1) \cap (P)$ khi đó để tìm toạ độ B_1 ta thay x, y, z từ phương trình tham số của (BB_1) vào phương trình của (P) được:

$$2(2+2t)+1+t-3(-3-3t)-5=0 \Leftrightarrow t=-9/14 \Rightarrow B_1(\frac{5}{7}, \frac{5}{14}, \frac{15}{14}).$$

- Gọi N là điểm chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1}$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{NA_1}}{\overrightarrow{NB_1}} = -\frac{AA_1}{BB_1} \Leftrightarrow N(\frac{25}{17}, 1, -\frac{6}{17}).$$

- Ta đi chứng minh rằng MA+MB nhỏ nhất khi và chỉ khi M≡N. Thật vậy:

Vì điểm N chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1} \Rightarrow$ A, B, N thẳng hàng.

Vậy: MA+MB≥AB=NA+NB.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi M≡N.

Vậy điểm $M(\frac{25}{17}, 1, -\frac{6}{17})$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 2: Cho hai điểm A(-7, 4, 4); B(-6, 2, 3) và mặt phẳng (P): 3x-y-2z+19=0. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho AM+BM nhỏ nhất.

Giải.

Cách 1

- Xét vị trí tương đối của A, B đối với (P), ta có:

  $t_A.t_B=(3(-7)-4-2.4+19).(3(-6)-2-2.3+19)=-14.(-7)=98>0$

Vậy A, B cùng phía đối với (P).

- Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (P).

Mặt phẳng (P) có một vtpt $\vec{n}$ (3, -1, -2).

Đường thẳng (AA_1) được xác định bởi:

$$(AA_1): \begin{cases} \text{qua } A(-7,4,4) \\ \text{vtcp } \vec{n}(3,-1,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (AA_1): \begin{cases} x = -7 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 4 - 2t \end{cases}, (t \in R).$$

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P). Ta có $H=(AA_1)\cap(P)$. Thay x, y, z từ phương trình tham số của (AA_1) vào (P), ta được:

  $3(-7+3t)-(4-t)-2(4-2t)+19=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(-4, 3, 2)$.

Giả sử $A_1(x_1, y_1, z_1)$. Vì H là trung điểm AA_1, ta có:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_H - x_A \\ y_1 = 2y_H - y_A \\ z_1 = 2z_H - z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 2 \\ z_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_1(-1, 2, 0).$$

- Phương trình đường thẳng (A_1B) được xác định bởi:

$$(A_1B): \begin{cases} \text{qua } A_1(-1,2,0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{A_1B}(-5,0,3) \end{cases} \Leftrightarrow (A_1B): \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases}, (t\in R).$$

- Gọi $N=(A_1B)\cap(P)$, khi đó để tìm toạ độ N ta thay x, y, z từ phương trình tham số của (A_1B) vào phương trình của (P) được:

  $3(-1-5t)-2-2.3t+19=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}\ 2/3 \Rightarrow N(-\frac{13}{3}, 2,2)$.

- Ta đi chứng minh rằng MA+MB nhỏ nhất khi và chỉ khi M≡N. Thật vậy:

Lấy điểm M bất kỳ thuộc (P) ta có:

  $MA+MB= MA_1+MB \geq A_1B=NA+NB$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi M≡N.

Vậy điểm $M(-\frac{13}{3}, 2,2)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2.

- Xét vị trí tương đối của A, B đối với (P), ta có:

  $t_A.t_B=(3(-7)-4-2.4+19).(3(-6)-2-2.3+19)=-14.(-7)=98>0$

Vậy A, B cùng phía đối với (P).

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (P), ta có $\vec{n}(3, -1, -2)$.

- Gọi A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên (P).

Phương trình (AA_1) được xác định bởi:

$$(AA_1): \begin{cases} \text{qua } A(-7,4,4) \\ \text{vtcp } \vec{n}(3,-1,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (AA_1): \begin{cases} x = -7 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 4 - 2t \end{cases}, (t\in R).$$

Vậy $A_1=(AA_1)\cap(P)$ khi đó để tìm toạ độ A_1 ta thay x, y, z từ phương trình tham số của (AA_1) vào phương trình của (P) được:

  $3(-7+3t)-(4-t)-2(4-2t)+19=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow A_1(-4, 3, 2)$.

- Gọi B_1 là hình chiếu vuông góc của B lên (P).

Phương trình (BB_1) được xác định bởi:

$$(BB_1): \begin{cases} \text{qua } B(-6,2,3) \\ \text{vtcp } \vec{n}(3,-1,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (BB_1): \begin{cases} x = -6 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, (t\in R).$$

Vậy $B=(BB_1)\cap(P)$ khi đó để tìm toạ độ B, ta thay x, y, z từ phương trình tham số của (BB_1) vào phương trình của (P) được:

$$3(-6+3t)-(2-t)-2(3-2t)+19=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \Rightarrow B_1(-\frac{9}{2},\frac{3}{2},2).$$

- Gọi N là điểm chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1}$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{NA_1}}{\overrightarrow{NB_1}}=-\frac{AA_1}{BB_1} \Leftrightarrow N(-\frac{13}{3},2,2).$$

- Ta đi chứng minh rằng MA+MB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M≡N. Thật vậy:

Gọi A_2 là điểm đối xứng của A qua (P).

Vì điểm N chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1} \Rightarrow A_2$, B, N thẳng hàng.

Vậy: $MA+MB = MA_2+MB \geq A_2B=NA+NB$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi M≡N.

Vậy điểm $M(-\frac{13}{3},2,2)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (HVKTQS-94): Cho hai điểm A(-1,3,-2); B(-9,4,9) và mặt phẳng (P): 2x-y+z+1=0. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho AM+BM nhỏ nhất.

BÀI GIẢI

Cách 1.

- Xét vị trí tương đối của A, B đối với (P), ta có:

$t_At_B=(-6).(-12)=72>0.$

Vậy A, B cùng phía đối với (P).

- Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (P).

Mặt phẳng (P) có một vtpt $\vec{n}(2,-1,1)$.

Đường thẳng (AA_1) được xác định bởi:

$$(AA_1):\begin{cases}\text{qua } A(-1,3,-2)\\ \text{vtcp } \vec{n}(2,-1,1)\end{cases} \Leftrightarrow (AA_1):\begin{cases}x=-1+2t\\ y=3-t\\ z=-2+t\end{cases},(t\in R).$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P) $\Rightarrow H=(AA_1)\cap(P)$, thay x, y, z từ phương trình tham số của (AA_1) vào (P), ta được:

$$2(-1+2t)-(3-t)+(-2+t)+1=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(1,2,-1).$$

Giả sử $A_1(x_1,y_1,z_1)$. Vì H là trung điểm AA_1, ta có:

$$\begin{cases}x_1=2x_H-x_A\\ y_1=2y_H-y_A\\ z_1=2z_H-z_A\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=3\\ y_1=1\\ z_1=0\end{cases} \Rightarrow A_1(3,1,0).$$

- Phương trình đường thẳng (A_1B) được xác định bởi:

$$(A_1B):\begin{cases}\text{qua } A_1(3,1,0)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{A_1B}(-12,3,9)\end{cases} \Leftrightarrow (A_1B):\begin{cases}x=3-4t\\ y=1+t\\ z=3t\end{cases},(t\in R).$$

- Gọi N=(A_1B)∩(P), khi đó để tìm toạ độ N ta thay x, y, z từ phương trình tham số của (A_1B) vào phương trình của (P) được:

  2(3-4t)-(1+t)+3t+1=0 ⇔ t=1 ⇒ N(-1, 2,3).

- Ta đi chứng minh rằng MA+MB nhỏ nhất ⇔ M≡N. Thật vậy:

Lấy điểm M bất kỳ thuộc (P) ta có:

$MA+MB= MA_1+MB \geq A_1B=NA+NB.$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi M≡N.

Vậy điểm M(-1, 2,3) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2.

- Xác định vị trí tương đối của A, B đối với (P), ta có:

  $t_A.t_B=(-6).(-12)=72>0$

Vậy A, B cùng phía đối với (P).

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (P), ta có: $\vec{n}$ (2, -1, 1).

- Gọi A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên (P). Ta đi xác định A_1.

Gọi (d_1) là đường thẳng qua A và vuông góc với (P), khi đó:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } A(-1,3,-2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,-1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = -1 + 2t_1 & (2) \\ y = 3 - t_1 & (3) \\ z = -2 + t_1 & (4) \end{cases}, t_1 \in R.$$

Vậy A_1=(d_1)∩(P), khi đó để tìm toạ độ A_1 ta thay (2), (3), (4) vào (1), được:

$2(-1+2t_1)-(3-t_1)+(-2+t_1)+1=0 \Leftrightarrow t_1=1 \Rightarrow A_1(1,2,-1).$

Suy ra: $AA_1=\sqrt{(1+1)^2+(2-3)^2+(-1+2)^2} = \sqrt{6}$

- Gọi B_1 là hình chiếu vuông góc của B lên (P). Ta đi xác định B_1.

Gọi (d_2) là đường thẳng qua B và vuông góc với (P), khi đó:

$$(d_2): \begin{cases} \text{qua } B(-9,4,9) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,-1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x = -9 + 2t_2 & (5) \\ y = 4 - t_2 & (6) \\ z = 9 + t_2 & (7) \end{cases}, t_2 \in R.$$

Vậy B_1=(d_2)∩(P), khi đó để tìm toạ độ B_1 ta thay (5), (6), (7) vào (1), được:

$2(-9+2t_2)-(4-t_2)+(9+t_2)+1=0 \Leftrightarrow t_2=2 \Rightarrow B_1(-5,2,11).$

Suy ra: $BB_1=\sqrt{(-5+9)^2+(2-4)^2+(11-9)^2} = 2\sqrt{6}$.

- Điểm N thuộc (P) chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1}=-2$

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{NA_1}=-2\overrightarrow{NB_1} \Leftrightarrow$ N(-1, 2,3).

- Ta đi chứng minh rằng MA+MB nhỏ nhất ⇔ M≡N. Thật vậy:

Gọi A_2 là điểm đối xứng của A qua (P). Vì điểm N chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1} \Rightarrow A_2$, B, N thẳng hàng.

Vậy: $MA+MB = MA_2+MB \geq A_2B=NA+NB.$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi M≡N.

Vậy điểm M(-1, 2,3) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 2 (ĐHNN I-97): Cho hai điểm A(1, 2, 3); B(4, 4, 5).

a. Viết phương trình đường thẳng (AB). Tìm giao điểm P của nó với mặt phẳng xOy. CMR với mọi điểm $Q \in (xOy)$, biểu thức $|QA-QB|$ có giá trị lớn nhất khi Q trùng với P.

b. Tìm điểm M trên mặt phẳng xOy sao cho tổng các độ dài MA + MB nhỏ nhất.

BÀI GIẢI

a. Phương trình đường thẳng (AB) cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(1,2,3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(3,2,2) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in R.$$

- Tìm giao điểm P của nó với mặt phẳng xOy.

Mặt phẳng xOy có phương trình z=0

$$\Rightarrow 3+2t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{3}{2} \Rightarrow P(-\frac{7}{2}, -1, 0).$$

- CMR với mọi điểm Q thuộc mặt phẳng xOy, biểu thức $|QA-QB|$ có giá trị lớn nhất khi Q trùng với P. Thật vậy:

Ta có $t_A.t_B=1.4=4>0 \Rightarrow$ A, B cùng phía với xOy.

Xét ΔQAB, ta có $|QA-QB| \le AB$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $Q \equiv P$.

b. Tìm điểm M trên mặt phẳng xOy sao cho MA+MB nhỏ nhất.

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (xOy), ta có: $\vec{n}(0, 0, 1)$.

- Gọi A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên (xOy) $\Rightarrow A_1(1, 2, 0)$ & $AA_1=3$.
- Gọi B_1 là hình chiếu vuông góc của B lên (xOy) $\Rightarrow B_1(4, 4, 0)$ & $BB_1=5$.
- Điểm N thuộc (xOy) chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1}=-\frac{3}{5}$, suy ra:

$$\overrightarrow{NA_1}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{NB_1} \Leftrightarrow N: \begin{cases} x_N = \dfrac{3x_{B_1}+5x_{A_1}}{8} \\ y_N = \dfrac{3y_{B_1}+5y_{A_1}}{8} \\ z_N = 0 \end{cases} \Rightarrow N(\frac{17}{8}, \frac{22}{8}, 0).$$

- Ta đi chứng minh rằng MA+MB nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv N$. Thật vậy:

Gọi A_2 là điểm đối xứng của A qua (xOy).

Vì điểm N chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1} \Rightarrow A_2$, B, N thẳng hàng.

Vậy: $MA+MB = MA_2+MB \ge A_2B=NA+NB$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv N$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hai điểm A(1, 0, 2); B(2, -1, 3) và mặt phẳng (P): x-2y+z-4=0. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho AM+BM nhỏ nhất.

Bài tập 2. Cho hai điểm A(1, 1, 0); B(0, -1, 1) và mặt phẳng (P): x-2y+z-4=0. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho AM+BM nhỏ nhất.

Bài tập 3. (ĐH Huế/A hệ chưa phân ban-97): Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho mặt phẳng (P): 2x-y+z+1=0 và hai điểm A(3, 1, 0); B(-9, 4, 9). Tìm toạ độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho |MA-MB| đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 4. (ĐHQG - 2000): Cho mặt phẳng (P): x+y+z-1=0 và hai điểm A(1, -3, 0); B(5, -1, -2).

a. Chứng tỏ rằng đường thẳng đi qua A, B cắt mặt phẳng (P) tại một điểm I. Tìm toạ độ điểm I.

b. Tìm toạ độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho |MA-MB| đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 5. (ĐHMĐC - 97): Cho hai điểm A(1, 4, 5), B(0, 3, 1), C(2, -1, 0) và mặt phẳng (P): 3x-3y-2z-15=0. Gọi G là trong tâm ΔABC. CMR điều kiện cần và đủ để điểm M nằm trên mặt phẳng (P) có tổng các bình phương khoảng cách đến các điểm A, B, C nhỏ nhất là điểm M phải là hình chiếu vuông góc của điểm G trên mặt phẳng (P). Xác định toạ độ của điểm M đó.

Bài tập 6. Cho mặt phẳng (P): 3x+3y+mz-6-m=0.

1 CMR (P) luôn đi qua một điểmcố định M. Tìm toạ độ của M.

2 Giả sử (P) cắt Ox, Oy, Oz theo thứ tự tại A, B, C.

 a Tính OA, OB, OC để thể tích tứ diện OABC đạt giá trị nhỏ nhất.

 b Tính OA, OB, OC để OA+OB+OC đạt giá trị nhỏ nhất.

CHỦ ĐỀ 8
ĐIỂM VÀ ĐƯỜNG THẲNG

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1. Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M, y_M, z_M)$ thoả mãn tính chất K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ y = z_0 + ct \end{cases}, t \in R.$$

Bước 2: Điểm $M \in (d)$, suy ra: $M(x_0+at, y_0+bt, z_0+ct)$

Bước 3: Thiết lập tính chất K cho điểm M.

Chú ý. Sử dụng tính chất điểm của đường thẳng ta có thể giải bài toán " Lập phương trình đường thẳng (d) cắt hai đường thẳng (d_1), (d_2) và song song với đường thẳng (d_3) cho trước". Phương pháp được minh hoạ bằng ví dụ sau :

Ví dụ 1 (ĐHGTVT - 2000): Cho 3 đường thẳng (d_1), (d_2), (d_3) có phương trình:

$$(d_1): \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{1}, (d_2): \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1},$$

$$(d_3): \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}.$$

Lập phương trình đường thẳng (d) cắt hai đường thẳng (d_1), (d_2) và song song với đường thẳng (d_3)

Giải.

Gọi $\vec{a_3}$ là một vtcp của đường thẳng (d_3), ta được: $\vec{a_3}(3, -2, -1)$.

Chuyển phương trình (d_1), (d_2) về dạng tham số:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2 + 2t_1 \\ y = -2 + 4t_1 \\ z = 1 + t_1 \end{cases}, t_1 \in R \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = 7 + t_2 \\ y = 3 + 2t_2 \\ z = 9 - t_2 \end{cases}, t_2 \in R$$

Giả sử $(d) \cap (d_1) = \{A\} \Rightarrow A \in (d_1) \Rightarrow A(2+2t_1, 4t_1-2, 1+t_1)$.

Giả sử $(d) \cap (d_2) = \{B\} \Rightarrow B \in (d_2) \Rightarrow B(7+t_2, 3+2t_2, 9-t_2)$.

Khi đó $\overrightarrow{AB}(t_2-2t_1+5, 2t_2-4t_1+5, -t_2-t_1+8)$.

Vì $(d)//(d_3)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} // \vec{a_3} \Leftrightarrow \frac{t_2-2t_1+5}{3} = \frac{2t_2-4t_1+5}{-2} = \frac{-t_2-t_1+8}{-1}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{141}{42} \Rightarrow A(\frac{80}{7}, \frac{83}{7}, \frac{32}{7})$$

Khi đó phương trình đường thẳng (d) được cho bởi :

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(\frac{80}{7}, \frac{83}{7}, \frac{32}{7}) \\ \text{vtcp } \vec{a}(3, -2, -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \frac{x - \frac{80}{7}}{3} = \frac{y - \frac{83}{7}}{-2} = \frac{z - \frac{32}{7}}{-1}.$$

Bài toán 2. Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M, y_M, z_M)$ sao cho $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ nhỏ nhất.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ y = z_0 + ct \end{cases}, t \in R.$$

Bước 2: Điểm $M \in (d)$, suy ra: $M(x_0+at, y_0+bt, z_0+ct)$

Bước 3: Khi đó:

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = (x_0+at)^2+(y_0+bt)^2+(z_0+ct)^2$$

$$=(a^2+b^2+c^2)t^2+2(ax_0+by_0+cz_0)t+x_0^2+y_0^2+z_0^2$$

$$\geq -\frac{\Delta}{4(a^2+b^2+c^2)}.$$

Vậy $(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)_{Min} = -\frac{\Delta}{4(a^2+b^2+c^2)}$ đạt được khi: $t = -\frac{ax_0+by_0+cz_0}{a^2+b^2+c^2}$

$$\Rightarrow M\left(x_0+a.\frac{ax_0+by_0+cz_0}{a^2+b^2+c^2}, y_0+b.\frac{ax_0+by_0+cz_0}{a^2+b^2+c^2}, z_0+c.\frac{ax_0+by_0+cz_0}{a^2+b^2+c^2}\right).$$

Ví dụ 2: Tìm trên đường thẳng (d): $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ điểm $M(x_M, y_M, z_M)$ sao cho $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ nhỏ nhất.

Giải.

Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = -1+3t \\ y = -3-2t \\ z = -2-t \end{cases}, t \in R$$

Điểm $M \in (d)$, suy ra: $M(-1+3t, -3-2t, -2-t)$.

Khi đó:

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = (-1+3t)^2+(-3-2t)^2+(-2-t)^2 = 12t^2+4t+14 \geq \frac{41}{3}.$$

Vậy $(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)_{Min} = \frac{41}{3}$ đạt được khi: $t = -\frac{1}{3} \Rightarrow M(-2, -\frac{7}{3}, -\frac{5}{3})$.

Bài toán 3: Cho hai điểm A, B và đường thẳng (d). Tìm điểm $M \in (d)$ sao cho MA+MB nhỏ nhất

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm toạ độ các điểm A_1, B_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B lên (d).

Bước 2: Tính các độ dài AA_1 và BB_1. Từ đó suy ra toạ độ điểm N chia vectơ $\overline{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1}$ (t.l $\frac{\overline{NA_1}}{\overline{NB_1}} = -\frac{AA_1}{BB_1}$).

Bước 3: Ta đi chứng minh rằng MA+MB nhỏ nhất khi và chỉ khi M≡N. Thật vậy: Gọi A_2 là điểm thuộc mặt phẳng xác định bởi B, (d), khác phía đối với (d) và thoả mãn:

$$\begin{cases} AA_1 = A_1A_2 \\ A_1A_2 \perp (d) \end{cases} \Rightarrow \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{A_1A_2}{BB_1} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{NA_1}}{\overrightarrow{NB_1}} = -\frac{A_1A_2}{BB_1}$$

$\Rightarrow A_2$, B, N thẳng hàng.

Vậy: MA+MB = MA_2+MB ≥ A_2B=NA+NB.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi M≡N.

Ví dụ 3: Cho hai điểm A(1, 2, -1); B($2-\sqrt{2}$, 2, -3) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Tìm điểm M thuộc (d) sao cho AM+BM nhỏ nhất.

Giải.

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có: $\vec{a}$ (0, -1, 1)

- Gọi A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên (d). Gọi (P_1) là mặt phẳng:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } A \\ (P_1) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{qua } A(1,2,-1) \\ \text{vtcp } \vec{a}(0,-1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): y-z-3=0.$$

Ta có A_1=(d)∩(P), toạ độ A_1 là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow A_1(2, 2, -1) \ \& \ AA_1=1.$$

- Gọi B_1 là hình chiếu vuông góc của B lên (d). Gọi (P_2) là mặt phẳng:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } B \\ (P_2) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases} \text{qua } B(2-\sqrt{2},2,-3) \\ \text{vtpt } \vec{a}(0,-1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): y-z-5=0.$$

Ta có B_1=(d)∩(P), toạ độ B_1 là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \\ y - z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow B_1(2, 3, -2) \ \& \ BB_1=2.$$

- N chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{NA_1}}{\overrightarrow{NB_1}} = -\frac{AA_1}{BB_1} = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{x_{A_1} + \frac{1}{2}x_{B_1}}{1+1/2} \\ y_N = \dfrac{y_{A_1} + \frac{1}{2}y_{B_1}}{1+1/2} \\ z_N = \dfrac{z_{A_1} + \frac{1}{2}z_{B_1}}{1+1/2} \end{cases} \Leftrightarrow N(2, \frac{7}{3}, -\frac{4}{3}).$$

- Ta đi chứng minh rằng MA+MB nhỏ nhất khi và chỉ khi M≡N. Thật vậy:

Gọi A_2 là điểm thuộc mặt phẳng xác định bởi B, (d), khác phía đối với (d) và thoả mãn:

$$\begin{cases} AA_1 = A_1A_2 \\ A_1A_2 \perp (d) \end{cases} \Rightarrow \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{A_1A_2}{BB_1} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{NA_1}}{\overrightarrow{NB_1}} = -\frac{A_1A_2}{BB_1} \Rightarrow A_2, B, N \text{ thẳng hàng}$$

Vậy: $MA+MB = MA_2+MB \geq A_2B = NA+NB$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi M≡N.

Chú ý. Phương pháp trên mắc phải một số nhược điểm sau:

a. Nếu phương trình của (d) được cho dưới dạng tham số thì ta buộc phải chuyển về dạng tổng quát để có thể kiểm tra được A và B nằm về một phía hay hai phí đối với (d).

b. Việc xác định toạ độ các điểm A_1 khá phức tạp.

Để khắc phục tình trạng trên, chúng ta lựa chọn phương pháp (được mô tả bằng ví dụ) sau:

Ví dụ 4: Cho 2 điểm A(a, 0, a) và $B(\frac{4a}{3}, -\frac{2a}{3}, -\frac{a}{3})$ và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = a - t \end{cases}, (t \in R).$$

Tìm điểm M thuộc (d) sao cho:

a. (MA+MB) nhỏ nhất.

b. |MA-MB| lớn nhất.

Giải.

Vì M∈(d) nên M(t, t, a-t). Khi đó ta có:

$$MA+MB = \sqrt{(t-a)^2 + t^2 + (-t)^2} + \sqrt{(t-\frac{4a}{3})^2 + (t+\frac{2a}{3})^2 + (\frac{4a}{3}-t)^2}$$

$$= \sqrt{3t^2 - 2at + a^2} + \sqrt{3t^2 - 4at + 4a^2}$$

$$= \sqrt{3}\left[\sqrt{\left(t-\frac{a}{3}\right)^2 + \frac{2a^2}{9}} + \sqrt{\left(t-\frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{8a^2}{9}}\right]$$

Xét các điểm $A_1(\frac{a}{3}, \frac{a\sqrt{2}}{3})$; $B_1(\frac{2a}{3}, -\frac{a\sqrt{8}}{3})$ và $M_1(t, 0)$.

Khi đó: $MA+MB = \sqrt{3}\,(M_1A_1+M_1B_1)$.

Vì M_1 chạy trên trục x'Ox và A_1, B_1 nằm về hai phía của x'Ox nên

$$(MA+MB)_{min} \Leftrightarrow (M_1A_1+M_1B_1)_{min} \Leftrightarrow M_1 = (A_1B_1) \cap x'Ox$$

$$\Leftrightarrow M_1(\frac{4a}{9}, 0) \Leftrightarrow M(\frac{4a}{9}, \frac{4a}{9}, \frac{5a}{9})$$

Tương tự câu a) ta có:

$$|MA-MB| = \sqrt{3}\left[\sqrt{\left(t-\frac{a}{3}\right)^2 + \frac{2a^2}{9}} - \sqrt{\left(t-\frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{8a^2}{9}}\right]$$

Xét các điểm $A_2(\frac{a}{3}, \frac{a\sqrt{2}}{3})$; $B_2(\frac{2a}{3}, \frac{a\sqrt{8}}{3})$ và $M_2(t, 0)$.

Khi đó: $|MA-MB| = \sqrt{3}\,|M_2A_2-M_2B_2|$.

Vì M_2 chạy trên trục hoành và A_2, B_2 nằm về một phía của Ox nên

$|MA-MB|_{max} \Leftrightarrow |M_2A_2-M_2B_2|_{max} \Leftrightarrow M_2=(A_2B_2)\cap Ox$

$\Leftrightarrow M_2(0, 0) \Leftrightarrow M(0, 0, a)$.

II.BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (ĐHTCKT - 93): Tìm tất cả các điểm trên trục Oy cách đều hai mặt phẳng (P_1), (P_2) biết (P_1): x+y-z+1=0 và (P_2): x-y+z-5=0.

BÀI GIẢI

Điểm $A\in Oy \Rightarrow A(0, b, 0)$.

Theo giả thiết, ta có :

$$d(A, (P_1))=d(A, (P_2)) \Leftrightarrow \frac{|b+1|}{\sqrt{3}}=\frac{|-b-5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow b=-3 \Rightarrow A(0, -3, 0).$$

Vậy tồn tại điểm A(0, -3, 0) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 2 (ĐHQY-96): Cho hai điểm A(1, 1, 0); B(3, -1, 4) và đường thẳng (d) : $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$.

Tìm điểm M trên đường thẳng (d) sao cho tổng các độ dài MA+MB nhỏ nhất.

BÀI GIẢI

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có $\vec{a}$ (1, -1, 2).

Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x=-1+t \\ y=1-t \\ z=-2+2t \end{cases}, t\in R$$

- Gọi A_1 là hình chiếu vuông góc góc của A lên (d).

Điểm $A_1\in(d)$, toạ độ của $A_1(t-1, -t+1, 2t-2) \Rightarrow \overrightarrow{AA_1}(t-2, -t, 2t-2)$.

Vì $\overrightarrow{AA_1}\perp(d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1}\perp\vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1}.\vec{a}=0 \Leftrightarrow (t-2)-(-t)+(2t-2) \Leftrightarrow t=1$.

Vậy $A_1(0,0,0)$ và $\overrightarrow{AA_1}(-1, -1, 0) \Rightarrow AA_1=\sqrt{2}$.

- Gọi B_1 là hình chiếu vuông góc góc của B lên (d).

Điểm $B_1\in(d)$, toạ độ của $B_1(t-1, -t+1, 2t-2) \Rightarrow \overrightarrow{BB_1}(t-4, -t+2, 2t-6)$.

Vì $\overrightarrow{AA_1}\perp(d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1}\perp\vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1}.\vec{a}=0 \Leftrightarrow (t-4)-(-t+2)+(2t-6) \Leftrightarrow t=3$.

Vậy $B_1(2, -2, 4)$ và $\overrightarrow{BB_1}(1, -1, 0) \Rightarrow BB_1=\sqrt{2}$.

- Điểm $N\in(d)$ chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{NA_1}=-\overrightarrow{NB_1} \Leftrightarrow N(1, -1, 2)$.

- Ta đi chứng minh rằng MA+MB nhỏ nhất $\Leftrightarrow M\equiv N$. Thật vậy:

Gọi A_2 là điểm thuộc mặt phẳng xác định bởi B, (d), khác phía đối với (d) và thoả mãn:

$$\begin{cases} AA_1=A_1A_2 \\ A_1A_2\perp(d) \end{cases} \Rightarrow \frac{AA_1}{BB_1}=\frac{A_1A_2}{BB_1} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{NA_1}}{\overrightarrow{NB_1}}=-\frac{A_1A_2}{BB_1}$$

$\Rightarrow A_2$, B, N thẳng hàng

Vậy: $MA+MB = MA_2+MB \geq A_2B=NA+NB$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $M\equiv N$.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M, y_M, z_M)$ sao cho $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ nhỏ nhất, biết:

a. (d): $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = t - 3 \end{cases}$, $(t \in R)$.

b. (d): $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{5}$

c. (d): $\begin{cases} 3x - y + 4z + 1 = 0 \\ 2x + 3y + z + 7 = 0 \end{cases}$.

Bài tập 2. Cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x - y - z - 3 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}.$$

Tìm điểm M thuộc (d) sao cho AM+BM nhỏ nhất khi:

a. A(1, 2, -1) và B(8, 1, -2).

b. A(1, 2, -1) và B(0, 1, 2).

Bài tập 3. (ĐHBK-98): Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình là:

$$(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}, t \in R; \text{ (P): } 2x-y-2z+1=0.$$

a. Tìm toạ độ các điểm thuộc đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ mỗi điểm đó đến mặt phẳng (P) bằng 1.

b. Gọi K là điểm đối xứng của điểm I(2, -1, 3) qua đường thẳng (d).. Xác định toạ độ K.

Bài tập 4. (ĐH Hồng Đức - 2000): Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình là:

$$(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 2t \end{cases}, t \in R; \text{ (P): } x+2y+z-1=0.$$

a. Tìm toạ độ các điểm thuộc đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ mỗi điểm đó đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{6}$.

b. Gọi K là điểm đối xứng của điểm I(2, 0, -1) qua đường thẳng (d).. Xác định toạ độ K.

Bài tập 5. (ĐH Đà Nẵng - 2000): Cho 4 điểm A(-4, 4, 0), B(2, 0, 4), C(1, 2, -1), D(7, -2, 3).

a. CMR A, B, C, D đồng phẳng.

b. Tính kc từ C đến đường thẳng (AB)

c. Tìm trên đường thẳng (AB) điểm M sao cho tổng khoảng cách mặt cầu+MD là nhỏ nhất.

CHỦ ĐỀ 9
GÓC TRONG KHÔNG GIAN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. GÓC GIỮA HAI VECTƠ

Cho hai vectơ $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ khác $\vec{0}$.

Gọi α là góc tạo bởi hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (1)$$

2. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), theo thứ tự có vtcp là

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$.

Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (2)$$

Chú ý. Từ (2) cho ta điều kiện cần và đủ để $(d_1) \perp (d_2)$ là
$\cos\alpha = 0$, hay $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

Bài toán 1: Xác định góc giữa hai đường thẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm vtcp $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ của đường thẳng (d_1), (d_2).

Bước 2. Áp dụng công thức (2).

Chú ý. Trong nhiều bài toán ta lại áp dụng kết quả sau của hình không gian:

a. *Tìm góc:*

Tìm điểm I nào đó có:

$$\begin{cases} IA // (d_1) \\ IB // (d_2) \end{cases}$$

Khi đó: $g((d_1), (d_2)) = \widehat{AIB}$.

b. *Tính góc:*

- Nếu biết được toạ độ của $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ thì Áp dụng công thức (1).
- Sử dụng tỉ số lượng giác của góc trong tam giác vuông hoặc dùng định lí cosin trong tam giác thường.

Ví dụ 1: Xác định số đo góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình cho bởi:

a. $(d_1): \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-4}{3}$, $(d_2): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$.

b. $(d_1): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = u + 2 \\ y = -3 + 2u \\ z = 3u + 1 \end{cases}$.

Giải.

a. Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có :

$\vec{a}_1(-2, 1, 3)$, $\vec{a}_2(1, -1, 3)$.

Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}_1.\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|.|\vec{a}_2|} = \frac{|(-2).1 + 1.(-1) + 3.3|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}.\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{151}}.$$

b. Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(2, 1, 3)$, $\vec{a}_2(1, 2, 3)$.

Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}_1.\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|.|\vec{a}_2|} = \frac{|2.1 + 1.2 + 3.3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}.\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{13}{14}.$$

3. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$

và đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$.

Gọi α là góc tạo bởi (P) và (d), β là góc giữa đường thẳng (d) và đường thẳng chứa vtpt $\vec{n}$ $(0 \le \alpha, \beta \le \frac{\pi}{2})$, thì $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\beta$. Ta có:

$$\sin\alpha = \frac{|a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \quad (3)$$

Chú ý. Từ (3) cho ta điều kiện để (d)//(P) (hoặc thuộc (P)) là $\sin\alpha = 0$
$\Leftrightarrow a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 = 0$.

Bài toán 2: Xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để xác định góc giữa (d) và (P), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm vtcp $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ của (d), vtpt $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ của (P).

Bước 2: Áp dụng công thức (3).

Ví dụ 2: Xác định số đo góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) biết:

$$(d): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad \text{và } (P): x+y+z+1=0.$$

Giải.

Gọi $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta có : $\vec{a}$ (1, -1, 3).

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có : $\vec{n}$ (1, 1, 1).

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) ($0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{a}.\vec{n}|}{|\vec{a}|.|\vec{n}|} = \frac{|1.1 + 1.(-1) + 1.3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}.\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \sqrt{\frac{3}{11}}.$$

4. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Cho mặt phẳng (P_1) có vtpt là $\vec{n}$ (n_1, n_2, n_3).

Cho mặt phẳng (P_2) có vtpt là $\vec{m}$ (m_1, m_2, m_3).

Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) ($0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$), ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3|}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}.\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \qquad (4)$$

Chú ý. Từ (4) cho ta điều kiện cần và đủ để $(P_1)\perp(P_2)$ là

$\cos\alpha=0$, hay $m_1n_1+ m_2n_2+ m_3n_3=0$.

Bài toán 3: Xác định góc giữa 2 mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để xác định góc giữa hai đường thẳng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm vtpt $\vec{n}$ (n_1, n_2, n_3), $\vec{m}$ (m_1, m_2, m_3) của mặt phẳng (P_1) và (P_2).

Bước 2: Áp dụng công thức (4).

Ví dụ 3: Xác định số đo góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) biết:

(P): x+y+2z+4=0và (Q): 2x+y+z+1=0.

Giải.

Gọi $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ theo thứ tự là vtpt của (P), (Q), ta có :

$\vec{n}_1(1, 1, 2)$, $\vec{n}_2(2, 1, 1)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) ($0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$), ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} = \frac{|1.2 + 1.1 + 2.1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}.\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{5}{6}.$$

II. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (ĐHQG/B-99): Cho các điểm A(a, 0, 0); B(0, a, 0); C(a, a, 0); D(0, 0, d). (a>0, d>0). Gọi A_1, B_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của O xuống các đường thẳng DA, DB.

a. Viết phương trình mặt phẳng chứa các đường thẳng OA_1, OB_1. CMR mặt phẳng đó vuông góc với đường thẳng CD.

b. Tính d theo a để góc $\angle A_1OB_1$ có số đo bằng 45^0.

BÀI GIẢI

a. Từ giả thiết: $\overrightarrow{OA_1} \perp \overrightarrow{DA}$ (-a, 0, d)

$\Rightarrow \overrightarrow{OA_1}$ (d, 0, a) và $\overrightarrow{OB_1} \perp \overrightarrow{DB}$ (0, -a, d) $\Rightarrow \overrightarrow{OB_1}$ (0, d, a).

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P) chứa các đường thẳng OA_1, OB_1, ta có:

$$\begin{cases} \vec{n}\perp\overrightarrow{OA_1} \\ \vec{n}\perp\overrightarrow{OB_1} \end{cases} \Rightarrow \vec{n}\left(\begin{vmatrix}0 & a\\ d & a\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a & d\\ a & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}d & 0\\ 0 & d\end{vmatrix}\right) = \vec{n}\ (-ad, -ad, d^2) \text{ chọn } \vec{n}\ (a, a, -d).$$

Vậy phương trình (P) được xác định bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } O(0,0,0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(a,a,-d) \end{cases} \Leftrightarrow (P): ax+ay-dz=0.$$

Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng CD bởi $\vec{n}\ //\ \overrightarrow{CD}$ (-a, -a, d).

b. Tính d theo a để góc $\angle A_1OB_1$ có số đo bằng 45^0. Ta có:

$$\cos\angle A_1OB_1 = \frac{|\overrightarrow{OA_1}.\overrightarrow{OB_1}|}{|\overrightarrow{OA_1}|.|\overrightarrow{OB_1}|} = \frac{|a^2|}{\sqrt{a^2+d^2}.\sqrt{a^2+d^2}} = \frac{a^2}{a^2+d^2}.$$

Vậy $\angle A_1OB_1 = 45^0 \Leftrightarrow \cos\angle A_1OB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2+d^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow d = a\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

Bài 2 (ĐHGTVT-97): Cho ba điểm $H(\frac{1}{2}, 0, 0)$; $K(0, \frac{1}{2}, 0)$; $I(1, 1, \frac{1}{3})$.

a. Viết phương trình giao tuyến của (HIK) với mặt phẳng x+z=0 ở dạng chính tắc.

b. Tính cosin của góc phẳng tạo bởi mặt phẳng (HIK) với mặt toạ độ Oxy.

BÀI GIẢI

a. Phương trình mặt phẳng (HIK)

$$(HIK): \begin{cases} \text{qua } H(\frac{1}{2},0,0) \\ \text{hai vtcp } \overrightarrow{HI}(\frac{1}{2},1,\frac{1}{3}) \ \&\ \overrightarrow{KI}(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}) \end{cases} \Leftrightarrow (HIK): \begin{cases} \text{qua } H(\frac{1}{2},0,0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(\frac{1}{6},\frac{1}{6},-\frac{3}{4}) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$(HIK):2x+2y-9z-1=0.

- Gọi (d) là giao tuyến của (HIK) với mặt phẳng x+z=0, (d) có dạng:

$$(d): \begin{cases} 2x+2y-9z-1=0 \\ x+z=0 \end{cases}.$$

- Gọi $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta có:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix}2 & -9\\0 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-9 & 2\\1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 2\\1 & 0\end{vmatrix}\right) = \vec{a}\ (2, -11, -2).$$

Vậy, chọn A(-1, 6, 1)$\in$(d), ta được:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(-1,6,1) \\ \text{vtcp } \vec{a}(2,-11,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-6}{-11} = \frac{z-1}{-2}.$$

b. Mặt phẳng (HIK) có vtpt $\vec{n}$ (2, 2, -9)

Mặt phẳng (Oxy) có vtpt $\vec{m}$ (0, 0, 1).

Vậy cosin của góc phẳng α tạo bởi mặt phẳng (HIK) với mặt toạ độ Oxy, được xác định bởi công thức:

$$\cos\alpha = \frac{|0+0-9|}{\sqrt{4+4+81}.\sqrt{0+0+1}} = \frac{9}{\sqrt{89}}.$$

Bài 3 (ĐHCĐ-97): Cho mặt phẳng (P): x+2y-z+5=0 và đường thẳng (d): $\frac{x+3}{2}$ =y+1=z-3.

a. Tính toạ độ giao điểm của (d) và (P).
b. Tính góc giữa (d) và (P).
c. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) lên (P).
d. Viết phương trình đường thẳng (Δ), nằm trên (P) đi qua giao điểm của (d) và (P) và vuông góc với (d).

BÀI GIẢI

a. Chuyển phương trình (d) về dạng tham số, được:

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t - 1 \\ z = t + 3 \end{cases}, t\in R.$$

Thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào phương trình (P), ta được:

(2t-3)+2(t-1)-(t+3)+5=0 $\Leftrightarrow$ t=1 $\Rightarrow$ I(-1,0,4).

b. Gọi $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta có $\vec{a}$ (2, 1, 1).

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có $\vec{n}$ (1, 2, -1).

Gọi α là góc tạo bởi (P) và (d). Ta có:

$$\sin\alpha = \frac{|2+2-1|}{\sqrt{4+1+1}.\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^0.$$

Vậy góc giữa (d) và (P) bằng 30^0.

c. Lấy A(-3, -1, 3)$\in$(d).

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P), ta có:

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } A(-3,-1,3) \\ \text{hai vtcp } \vec{a}(2,1,1)\ \&\ \vec{n}(1,2,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } A(-3,-1,3) \\ \text{vtpt } \vec{m}(-3,3,3) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x-y-z-5=0$$

Khi đó hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) $\Rightarrow$ d=(P)$\cap$(Q), có dạng:

$$\begin{cases} x + 2y - z + 5 = 0 \\ x - y - z - 5 = 0 \end{cases}.$$

d. Gọi $\vec{b}$ là vtcp của đường thẳng (Δ). Từ giả thiết:

$$\begin{cases} \vec{b} \perp \vec{n} \\ \vec{b} \perp \vec{a} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{b}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = \vec{b}\,(-3, 3, 3).$$

Vậy đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } I(-1 0,4) \\ \vec{b}(-3,3,3) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{1}.$$

Chú ý: Có thể lập luận như sau:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } I(-1 0,4) \\ (\Delta) \subset (P) \\ (\Delta) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} \text{qua } I(-1 0,4) \\ \vec{b} \perp \vec{n} \\ \vec{b} \perp \vec{a} \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} \text{qua } I(-1 0,4) \\ \vec{b} // \vec{m} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} \text{qua } I(-1 0,4) \\ \vec{b}(-1,1,1) \end{cases}$$

Bài 4 (ĐH Cần thơ-95): Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$$(d): \begin{cases} x + 4y - 2z + 7 = 0 \\ 3x + 7y - 2z = 0 \end{cases} \quad (P): 3x+y-z+1=0.$$

a. Tính sin của góc giữa (d) và (P).

b. Hãy viết phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P).

BÀI GIẢI

a. Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}\,(6, -4, -5).$$

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (P), ta có: $\vec{n}\,(3, 1, -1)$.

- Gọi α góc giữa (d) và (P), khi đó sinα được xác định bởi công thức:

$$\sin\alpha = \frac{|3.6 + 1.(-4) - 1.(-5)|}{\sqrt{(3^2 + 1^2 + (-1)^2)(6^2 + (-4)^2 + (-5)^2)}} = \frac{19}{11\sqrt{7}}.$$

b. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P).

- (Q) chứa đường thẳng (d) $\Rightarrow$ (Q) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) , có dạng:

x+4y-2z+7+m(3x+7y-2z)=0

$\Leftrightarrow$ (Q): (1+3m)x+(4+7m)y-2(m+1)z+7=0 ((1)

khi đó (Q) có vtpt $\vec{n}_1$(1+3m), 4+7m, -2(m+1)).

- $(Q)\perp(P) \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n}_1=0 \Leftrightarrow 3(1+3m)+4+7m+2(m+1)=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$.

Thay $m=-\frac{1}{2}$ vào (1), được (Q): -x+y-2z+7=0.

- Hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), có dạng:

$$(d_1): \begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0 \\ -x + y - 2z + 7 = 0 \end{cases}.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Xác định số đo góc giữa 2 đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình cho bởi:

a. $(d_1): \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$, và $(d_2): \begin{cases} 4x + y - 19 = 0 \\ x - z + 15 = 0 \end{cases}$.

b. $(d_1): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = u + 2 \\ y = -3 + 2u \\ z = 3u + 1 \end{cases}$.

c. $(d_1): \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$, $(d_2): \begin{cases} 3x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$.

Bài tập 2. (ĐHHH - 2000): Cho 3 đường thẳng (d_1), (d_2), (d_3) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x - y + 4z - 3 = 0 \\ 2x - y - z + 1 = 0 \end{cases}, (d_3): \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{1}$$

a. Xác định cosin góc giữa (d_1) và (d_2).

b. Lập phương trình đường thẳng (d) song song với (d_3) đồng thời cắt cả (d_1) và (d_2).

Bài tập 3. Xác định số đo góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình cho bởi:

a. $(d): \begin{cases} 4x + y - 19 = 0 \\ x - z + 15 = 0 \end{cases}$ và (P): x+y-7z-58=0.

b. $(d): \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ và $(P): \begin{cases} x = 1 + t_1 + t_2 \\ y = 2t_1 + t_2 \\ z = 1 + 3t_1 + t_2 \end{cases}$.

Bài tập 4 (CĐSP TP.HCM - 99): Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình;

$$(d): \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{-1} \text{ và (P): } 2x+y+z-1=0.$$

a. Xác định số đo góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (P).

b. Tìm toạ độ giao điểm A của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P).

c. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng (d_1) đi qua A vuông góc với (d) và nằm trong mặt phẳng (P).

Bài tập 5. (ĐHAN_CS - 98): Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình;

$$(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2} \text{ và } (P): x+z+2=0.$$

a. Xác định số đo góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng ((P).

b. Lập phương trình đường thẳng (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d) lên mặt phẳng (P).

CHỦ ĐỀ 10

TAM GIÁC TRONG KHÔNG GIAN

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

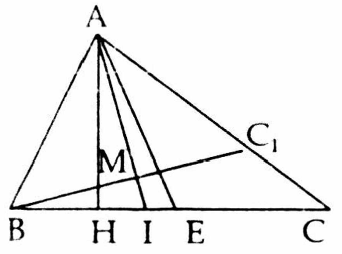
Bài toán 1: Cho ΔABC, lập phương trình:

a. Đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A

b. Đường cao kẻ từ đỉnh A

c. Đường phân giác trong của góc A

PHƯƠNG PHÁP CHUNG



a. Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định toạ độ đỉnh A và trung điểm E của cạnh BC.

Bước 2: Khi đó phương trình trung tuyến (AE) đi qua A và E.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cach 1. Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của A lêm BC.

Bước 2: Khi đó phương trình đường cao (AH) đi qua A và H.

Cach 2. Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lập phương trình mặt phẳng (ABC).

Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với BC.

Bước 3: Khi đó đường cao $(AH)=(ABC)\cap(P)$.

c. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cach 1. Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi I là chân đường phân giác trong góc A lên cạnh BC, ta có:

$$\frac{\overrightarrow{IB}}{\overrightarrow{IC}}=-\frac{AB}{AC}=k \Rightarrow I:\begin{cases} x=\dfrac{x_B-kx_C}{1-k} \\ y=\dfrac{y_B-ky_C}{1-k} \\ z=\dfrac{z_B-kz_C}{1-k}\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AI}.$$

Bước 2: Phương trình đường phân giác (AI) được xác định bởi:

$$(AI):\begin{cases}\text{qua } A \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AI}\end{cases}.$$

Cách 2.

Bước 1. (Phân tích): Trên AC lấy một điểm C_1 thoả mãn:

$AB=AC_1$ (1)

C, C_1 cùng phía với $A \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AC_1}=k\overrightarrow{AC} \\ k>0\end{cases}$ 181 (2)

Suy ra ΔABC_1 cân tại A, do đó đường phân giác trong của góc A của ΔABC cắt BC_1 tại M là trung điểm của BC_1. Vậy, đường phân giác trong của góc A chính là đường thẳng (AM).

Bước 2. (Dựng): Điểm $C_1 \in (AC)$, có toạ độ C_1 thoả mãn phương trình tham số của AC.

Giải (2) và (1) $\Rightarrow C_1 \Rightarrow M \Rightarrow \overrightarrow{AM}$

Bước 3. Phương trình đường phân giác (AM) được xác định bởi:

$$(AM): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AM} \end{cases}.$$

Ví dụ 1 : Cho ΔABC, biết A(1, 2, -1), B(2, -1, 3), C(-4, 7, 5).

a. Lập phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A
b. Lập phương trình đường cao kẻ từ đỉnh A
c. Lập phương trình đường phân giác trong của góc B.

Giải

a. Gọi E là trung điểm BC $\Rightarrow$ E(-1, 3, 4) $\Rightarrow \overrightarrow{AE}$ (-2, 1, 5).

Phương trình trung tuyến AE được cho bởi:

$$(AE): \begin{cases} \text{qua } A(1,2,-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{a_1}(-2,1,5) \end{cases} \Leftrightarrow (AE): \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{5}.$$

b. Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1.

Phương trình cạnh BC được cho bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{qua } B(2,-1,3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{BC}(-6,8,2) \end{cases} \Leftrightarrow (BC): \begin{cases} x = 2-3t \\ y = -1+4t \\ z = 3+t \end{cases}, t \in R.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc H của A lêm BC $\Rightarrow H \in (BC)$, khi đó:

H(2-3t, -1+4t, 3+t) & $\overrightarrow{AH}$ (1-3t, -3+4t, 4+t).

Vì $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -3.(1-3t)+4.(-3+4t)+1.(4+t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{11}{26}$.

Khi đó $\overrightarrow{AH}(-\frac{7}{26}, -\frac{34}{26}, \frac{115}{26})$ chọn $\overrightarrow{a_2}$ (-7, 34, 115)

Khi đó phương trình đường cao (AH) được cho bởi:

$$(AH): \begin{cases} \text{qua } A(1,2,-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{a_2}(-7,34,115) \end{cases} \Leftrightarrow (AH): \frac{x-1}{-7} = \frac{y-2}{34} = \frac{z+1}{115}.$$

Cách 2.

Phương trình mặt phẳng (ABC) được cho bởi:

$$(ABC): \begin{cases} \text{qua } A(1,2,-1) \\ \text{cap vtcp } \overrightarrow{AB}(1,-3,4) \& \overrightarrow{AC}(-5,5,6) \end{cases} \Leftrightarrow (ABC): \begin{cases} \text{qua } A(1,2,-1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(34,26,13) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (ABC): 34x+26y+13z-73=0.

Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (P) \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A(1,2,-1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{BC}(-6,7,2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): -6x+7y+2z-6=0.$$

Khi đó đường cao (AH)=(ABC)∩(P) có phương trình được cho bởi:

$$(AH): \begin{cases} 34x + 26y + 13z - 73 = 0 \\ -6x + 7y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

c. Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách : Gọi I là chân đường phân giác trong góc B lên cạnh AC, ta có:

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IC}} = -\frac{BA}{BC} = -\frac{1}{2} = k \Rightarrow I: \begin{cases} x = \dfrac{x_A - kx_C}{1-k} = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{y_A - ky_C}{1-k} = \dfrac{11}{3} \\ z = \dfrac{z_A - kz_C}{1-k} = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{BI}(-\frac{8}{3}, \frac{14}{3}, -2)$ chọn $\vec{a}(4, -7, 3)$.

Phương trình đường phân giác (BI) được xác định bởi:

$$(BI): \begin{cases} \text{qua } B(2,-1,3) \\ \text{vtcp } \vec{a}(4,-7,3) \end{cases} \Leftrightarrow (BI): \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z-3}{3}.$$

Cách 2

Phân tích: Trên BC lấy một điểm C_1 thoả mãn:

- $BA=BC_1$ (1)
- C, C_1 cùng phía với B $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BC_1} = k\overrightarrow{BC} \\ k > 0 \end{cases}$ (2)

Suy ra ΔABC_1 cân tại B, do đó đường phân giác trong của góc B của ΔABC cắt AC_1 tại M là trung điểm của AC_1.

Vậy đường phân giác trong của góc B chính là đường thẳng (BM).

Dựng. Điểm $C_1 \in (BC)$, có toạ độ $C_1(2-3t, 4t-1, 3+t) \Rightarrow \overrightarrow{BC_1}(-3t, 4t, t)$. Khi đó:

(2) $\Leftrightarrow$ t>0.

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{26t^2} = \sqrt{26} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \ (l) \\ t = 1 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow C_1(-1, 3, 4) \Rightarrow M(0, \frac{5}{2}, \frac{3}{2})$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM}(-2, \frac{7}{2}, -\frac{3}{2})$ chọn $\vec{a}(4, -7, 3)$.

Phương trình đường phân giác (BM) được xác định bởi:

$$(BM): \begin{cases} \text{qua } B(2,-1,3) \\ \text{vtcp } \vec{a}(4,-7,3) \end{cases} \Leftrightarrow (BM): \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z-3}{3}.$$

Chú ý. Nếu chỉ bài toán yêu cầu tính độ dài đường phân giác trong của một đỉnh bất kỳ ta có thể giải bằng việc sử dụng định lý hàm số cosin.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (HVKTQS-97): Cho ΔABC, biết $A(1, 2, 5)$ và phương trình hai trung tuyến là

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-6}{2}=\frac{z-1}{1} \text{ và } \frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-2}{1}.$$

a. Viết phương trình chính tắc các cạnh của tam giác.

b. Viết phương trình chính tắc của đường phân giác trong của góc A.

BÀI GIẢI

a. Kiểm nghiệm rằng A không thuộc hai trung tuyến trên, ta giả sử:

$$(BN): \frac{x-3}{-2}=\frac{y-6}{2}=\frac{z-1}{1} \text{ và } (CP): \frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-2}{1}$$

- Chuyển phương trình (BN) và (CP) về dạng tham số, ta được:

$$(BN): \begin{cases} x=-2t+3 \\ y=2t+6 \\ z=t+1 \end{cases}, t\in R \text{ và } (CP): \begin{cases} x=u+4 \\ y=-4u+2 \\ z=u+2 \end{cases}, u\in R.$$

Khi đó toạ độ $B(-2t+3, 2t+6, t+1)$; $C(u+4, -4u+2, u+2)$

và trọng tâm $G=(BN)\cap(CP)$ có tạo độ $G(3, 6, 1)$, suy ra:

$\overrightarrow{GA}(-2, -4, 4)$, $\overrightarrow{GB}(-2t, 2t, t)$ và $\overrightarrow{GC}(u+1, -4u-4, u+1)$.

- Xét ΔABC, ta có:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow (-2-2t+u+1, -4+2t+-4u-4, 4+t+u+1)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ u=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(7,2,-1) \\ C(1,14,-1) \end{cases}.$$

Vậy phương trình chính tắc các cạnh của ΔABC được xác định như sau:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(1,2,5) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(6,0,-6) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-5}{-1},$$

tương tự

$$(AC): \frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-5}{-1} \;\&\; (BC): \frac{x-7}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{0},$$

b. Viết phương trình chính tắc của đường phân giác trong của góc A.

Cách 1: Gọi I là chân đường phân giác trong góc A lên cạnh BC, ta có:

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}}=-\frac{AB}{AC}=-\frac{\sqrt{10}}{5}=k \Rightarrow I: \begin{cases} x=\dfrac{x_B-kx_C}{1-k}=\dfrac{35+\sqrt{10}}{\sqrt{10}+5} \\ y=\dfrac{y_B-ky_C}{1-k}=\dfrac{10+14\sqrt{10}}{\sqrt{10}+5} \\ z=\dfrac{z_B-kz_C}{1-k}=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI}\left(\frac{30}{\sqrt{10}+5}, \frac{12\sqrt{10}}{\sqrt{10}+5}, -6\right) \text{ chọn } \vec{a}(\sqrt{5}, -2\sqrt{2}, \sqrt{2}-\sqrt{5}).$$

Phương trình đường phân giác (AI) được xác định bởi:

$$(AI):\begin{cases}\text{qua } A(1,2,5)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{AI}(\sqrt{5},-2\sqrt{2},\sqrt{2}-\sqrt{5})\end{cases} \Leftrightarrow (AI): \frac{x-1}{\sqrt{5}}=\frac{y-2}{-2\sqrt{2}}=\frac{z-5}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}.$$

Cách 2.

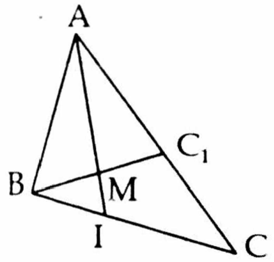
Phân tích: Trên AC lấy một điểm C_1 thoả mãn:

- $AB=AC_1$ (1)
- C, C_1 cùng phía với A $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AC_1}=k\overrightarrow{AC}\\ k>0\end{cases}$ (2)

Suy ra ΔABC_1 cân tại A, do đó đường phân giác trong của góc A của ΔABC cắt BC_1 tại M là trung điểm của BC_1.
Vậy, đường phân giác trong của góc A chính là đường thẳng (AM).

Dựng. Điểm $C_1 \in (AC)$, có toạ độ $C_1(1, 2v+2, -v+5) \Rightarrow \overrightarrow{AC_1}(0, 2v, -v)$. Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases}2v=12k\\ -v=-6k \Rightarrow v<0.\\ k>0\end{cases}$$



$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{4v^2+v^2}=\sqrt{36+36} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=\frac{6\sqrt{10}}{5} \quad (l)\\ v=-\frac{6\sqrt{10}}{5}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow C_1\left(1, \frac{10-12\sqrt{10}}{5}, \frac{25+6\sqrt{10}}{5}\right) \Rightarrow M\left(4, \frac{10-6\sqrt{10}}{5}, \frac{10+3\sqrt{10}}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}\left(3, -\frac{6\sqrt{10}}{5}, \frac{3\sqrt{10}-15}{5}\right) \text{ chọn } \vec{a}(\sqrt{5}, -2\sqrt{2}, \sqrt{2}-\sqrt{5}).$$

Phương trình đường phân giác (AM) được xác định bởi:

$$(AM):\begin{cases}\text{qua } A(1,2,5)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{AM}(\sqrt{5},-2\sqrt{2},\sqrt{2}-\sqrt{5})\end{cases} \Leftrightarrow (AM): \frac{x-1}{\sqrt{5}}=\frac{y-2}{-2\sqrt{2}}=\frac{z-5}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}.$$

Bài 2 (HVNH-2000): Cho hai điểm A(0, 0, -3), B(2, 0, -1) và mặt phẳng (P): 3x-8y+7z-1=0.

a. Tìm toạ độ giao điểm I của đường thẳng đi qua hai điểm A, B với mặt phẳng (P).

b. Tìm toạ độ điểm C nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABC là tam giác đều.

BÀI GIẢI

a. Phương trình đường thẳng (AB) được xác định bởi:

$$(AB):\begin{cases}\text{qua } A(0,0,-3)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(2,0,2)\end{cases} \Leftrightarrow (AB):\begin{cases}x=2t\\ y=0\\ z=-3+2t\end{cases}, (t\in R).$$

Thay các giá trị của x, y, z trong phương trình tham số của (AB) vào phương trình của (P) ta được:

3.2t-8.0+7(-3+2t)-1=0 $\Leftrightarrow$ t=11/10.

Thay $t=\frac{11}{10}$ vào phương trình (AB) ta được giao điểm $I(\frac{11}{5}, 0, -\frac{4}{5})$.

b. Giả sử $C(x_0, y_0, z_0)$. Vì $C(x_0, y_0, z_0) \in (P) \Leftrightarrow 3x_0 - 8y_0 + 7z_0 - 1 = 0$ (1)

Tam giác ABC đều khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} AC = BC \\ AC = AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC^2 = BC^2 \\ AC^2 = AB^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + (z_0+3)^2 = (x_0-2)^2 + y_0^2 + (z_0+1)^2 \\ x_0^2 + y_0^2 + (z_0+3)^2 = (2)^2 + (-1+3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + z_0 + 1 = 0 & (2) \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 6z_0 + 1 = 0 & (3) \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3) bằng cách:

Từ (2), ta có: $z_0 = -1 - x_0$. (4)

Thay (4) vào (1), ta được :

$3x_0 - 8y_0 + 7(-1 - x_0) - 1 = 0 \Leftrightarrow y_0 = -\frac{1}{2}x_0 - 1$. (5)

Thay (4),(5) vào (3), được:

$$(1 + \frac{1}{4} + 1)x_0^2 + (1 + 2 - 6)x_0 + 1 + 1 - 6 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}x_0^2 - 3x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = -\frac{2}{3} \end{array}\right..$$

Với $x_0 = 2$, ta được: $y_0 = -2$ & $z_0 = -3 \Rightarrow C(2, -2, -3)$.

Với $x_0 = -\frac{2}{3}$, ta được: $y_0 = -\frac{2}{3}$ & $z_0 = -\frac{1}{3} \Rightarrow C(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.

Vậy tồn tại hai điểm C thuộc (P) để tam giác ABC đều.

Bài 3 (ĐHMĐC - 2000): Cho ΔABC, biết $C(3, 2, 3)$ và phương trình đường cao AH, đường phân giác trong BM của góc B có phương trình:

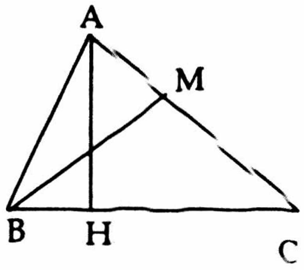
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{-2} \text{ và } \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{1}.$$

Tính độ dài các cạnh của ΔABC.

BÀI GIẢI

- Chuyển phương trình (AH), (BM) về dạng tham số, ta được:

$$(AH): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, t \in R \text{ và } (BM): \begin{cases} x = 1 + u \\ y = 4 - 2u \\ z = 3 + u \end{cases}, u \in R.$$



Khi đó toạ độ $A(2+t, 3+t, 3-2t)$ & $B(1+u, 4-2u, 3+u)$.

- Xác định toạ độ đỉnh B

Ta có: $\overrightarrow{CB}(-2+u, 2-2u, u)$,

$$BC \perp AH \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} . \overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow 1.(-2+u) + 1.(2-2u) - 2.u = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Ta được $B(1, 4, 3)$.

- Xác định toạ độ đỉnh A

Ta có: $\overrightarrow{BA}$ (1+t, -1+t, -2t), $\overrightarrow{BM}$ (1, -2, 1), $\overrightarrow{BC}$ (2, -2, 0).

Vì BM là đường phân giác trong của góc B, do đó:

$$\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) = \cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BM}|} = \frac{\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BM}|.|\overrightarrow{BC}|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1.(1+t)-2.(-1+t)+1.(-2t)}{\sqrt{(1+t)^2+(-1+t)^2+(-2t)^2}} = \frac{1.2-2.(-2)+1.0}{\sqrt{4+4}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \end{array}\right.$$

- Với t=0 ⇒ A(2, 3, 3).

  Nhận xét rằng A, B, C thẳng hàng ⇒ A(2, 3, 3) bị loại.

- Với t=-1 ⇒ A(1, 2, 5) loại vì khi đó A, B, C thẳng hàng.

  Nhận xét rằng A, B, C không thẳng hàng ⇒ A(1, 2, 5) chấp nhận được..

- Khi đó ta có được: AB= $2\sqrt{2}$, BC= $2\sqrt{2}$, CA= $2\sqrt{2}$ (ΔABC đều).

Bài 4 (ĐHMĐC - 97): Cho ba điểm A(1, 4, 5), B(0, 3, 1), C(2, -1, 0) và mặt phẳng (P): 3x-3y-2z-15=0. Gọi G là trọng tâm ΔABC. CMR điều kiện cần và đủ để điểm M nằm trên mặt phẳng (P) có tổng các bình phương khoảng cách đến các điểm A, B, C nhỏ nhất là điểm M phải là hình chiếu vuông góc của điểm G trên mặt phẳng (P). Xác định toạ độ của điểm M đó.

BÀI GIẢI

- Chứng minh M≡H là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (P)

Với G là trọng tâm ΔABC, ta có:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$,

∀M∈(P) luôn có: $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} \Rightarrow MA^2=MG^2+GA^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}$.

$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} \Rightarrow MB^2=MG^2+GB^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}$.

$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} \Rightarrow MC^2=MG^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}$

$\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+(MA^2+MB^2+MC^2)+\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$

$=3MG^2+(GA^2+GB^2+GC^2)$

Vậy:

$MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất ⇔ MG nhỏ nhất

⇔ M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (P) ⇔ M≡H.

- Xác định toạ độ điểm M

Toạ độ điểm G(1, 2, 2).

Mặt phẳng (P) có một vtpt $\vec{n}$ (3, -3, -2).

Gọi (d) là đường thẳng qua G và vuông góc với (P), ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } G(1,2,2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(3,-3,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-3t \\ z = 2-2t \end{cases}, (t \in R).$$

Goi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P). Ta có H=(d)∩(P).

Thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào (P), ta được:

3(1+3t)-3(2-3t)-2(2-2t)-15=0. ⇔ t=1.

Thay t=1 vào phương trình tham số của (d) ta được M≡H(4, -1,0).

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ΔABC, biết A(1, 2, 5), B(1, 4, 3), C(5, 2, 1) và mặt phẳng (P): x-y-z-3=0.

a Lập phương trình các đường trung tuyến, đường cao và đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A.

b Gọi G là trọng tâm ΔABC. CMR điều kiện cần và đủ để điểm M nằm trên mặt phẳng (P) có tổng các bình phương khoảng cách đến các điểm A, B, C nhỏ nhất là điểm M phải là hình chiếu vuông góc của điểm G trên mặt phẳng (P). Xác định toạ độ của điểm M đó.

Bài tập 2. Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$.

a Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm (khác gốc toạ độ) của mặt cầu (S với Ox, Oy, Oz. Các định toạ độ của A, B, C và lập phương trình mặt phẳng (ABC)

b Lập phương trình các đường trung tuyến, đường cao và đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của ΔABC.

c Xác định toạ độ tâm và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài tập 3. Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4z-4=0$ và các điểm A(3, 1, 0), B(2, 2, 4), C(-1, 2, 1).

a Lập phương trình mặt phẳng (ABC)

b Lập phương trình các đường trung tuyến, đường cao và đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của ΔABC.

c Xác định toạ độ tâm và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

PHẦN IV

MẶT CẦU

CHỦ ĐỀ 1

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách một điểm I cố định một khoảng bằng R, gọi là mặt cầu tâm I bán kính R.

2. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA MẶT CẦU

Mặt cầu (S) có tâm I(a, b, c), bán kính R có phương trình chính tắc là:

(S): $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. (1)

3. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT CẦU

Cho mặt cầu (S) có phương trình:

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (điều kiện $a^2+b^2+c^2-d>0$). (2)

đó chính là phương trình tổng quát của mặt cầu (S).

Để xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu (S), ta chuyển nó về dạng chính tắc: (S): $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2= a^2+b^2+c^2-d$

$\Rightarrow$ tâm I(a, b, c) và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Mở rộng. Phương trình: $A(x^2+y^2+z^2)-2Bx-2Cy-2Dz+E=0$ (điều kiện $A\neq0$ và $B^2+C^2+D^2-AE>0$) là phương trình của một mặt cầu.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau đây, phương trình nào là phương trình của mặt cầu, khi đó chỉ rõ tạo độ tâm và bán kính của nó, biết:

a. $x^2 + y^2 + z^2- 2x - 2y- 2z + 2 = 0$.

b. $x^2 + y^2 + z^2- 2x - 4y+9 = 0$.

c. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2- 4x + 6y-8z + 4 = 0$.

d. $-x^2 - y^2 - z^2- 2x - 2y + 6z - 7 = 0$.

e. $2x^2 + y^2 + z^2- 2x - 2y - 2 = 0$ (*)

Giải.

a. Kểm nghiệm rằng $a^2+b^2+c^2-d =1+1+1-2>0$.

Vậy $x^2 + y^2 + z^2- 2x - 2y- 2z + 2 = 0$ là phương trình của mặt cầu có :

$$\begin{cases}\text{Tam } I(1,1,1)\\ \text{Bkinh } R=1\end{cases}$$

b. Kểm nghiệm rằng $a^2+b^2+c^2-d =1+4-9<0$.

Vậy $x^2 + y^2 - 2x - 4y+9 = 0$ là tập rỗng.

c. Phương trình $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 8z + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 4z + 2 = 0.$

Kiểm nghiệm rằng $a^2+b^2+c^2-d = 1+\frac{9}{4}+4-2>0.$

Vậy $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 8z + 4 = 0$ là phương trình của mặt cầu có

$$\begin{cases} \text{Tam } I(1,-\frac{3}{2},2) \\ \text{Bkinh } R = \frac{\sqrt{21}}{2} \end{cases}.$$

d. Phương trình $-x^2 - y^2 - z^2 - 2x - 2y + 6z - 7 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 6z + 7 = 0.$

Kiểm nghiệm rằng $a^2+b^2+c^2-d = 1+1+9-7>0.$

Vậy $-x^2 - y^2 - z^2 - 2x - 2y + 6z - 7 = 0$ là phương trình của mặt cầu có

$$\begin{cases} \text{Tam } I(-1,-1,3) \\ \text{Bkinh } R = 2 \end{cases}.$$

e. Phương trình (*) không phải là phương trình mặt cầu bởi hệ số của x^2, y^2 và z^2 khác nhau.

Ví dụ 2. Cho họ mặt cong (S_m) có phương trình:

$$(S_m): x^2 + y^2 + z^2 - 4mx - 2y + 2mz + m^2 + 4m = 0.$$

a. Tìm điều kiện của m để (S_m) là một họ mặt cầu.

b. CMR tâm của (S_m) luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Giải

a. Để (S_m) là một họ mặt cầu điều kiện cần và đủ là:

$(2m)^2+1+m^2-m^2-4m \ge 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 \ge 0$ luôn đúng $\forall m$.

Vậy (S_m) luôn là phương trình của mặt cầu với mọi m

b. Khi đó: toạ độ tâm I_m của (S_m) là:

$$\begin{cases} x = 2m \\ y = 1 \\ z = -m \end{cases}.$$

Vậy I_m luôn nằm trên đường thẳng (d) cố định có phương trình tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = -t \end{cases}, t \in R.$$

4. PHƯƠNG PHÁP

Bài toán: Lập phương trình mặt cầu thoả mãn điều kiện cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Gọi (S) là mặt cầu thoả mãn điều kiện đầu bài. Chúng ta lựa chọn phương trình dạng (1) hoặc dạng (2).

Muốn có phương trình dạng (1), ta lập hệ 4 phương trình với 4 ẩn a, b c, R.

Muốn có phương trình dạng (2), ta lập hệ 4 phương trình với 4 ẩn a, b c, d ($đk$ $a^2+b^2+c^2-d \ge 0$).

Ví dụ 3. Lập phương trình mặt cầu tâm I(2, 2, -3) bán kính R=3.

Giải.

Mặt cầu (S) có :

$$\begin{cases} \text{Tam } I(2,2,-3) \\ \text{Bkinh } R = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-2)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9.$$

Ví dụ 4. Lập phương trình mặt cầu đi qua điểm A(3, 1, -1) và tâm I(1, 2, -1).

Giải.

Mặt cầu (S) có tâm I(1, 2, -1) có dạng:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=R^2.$$

Điểm $A(3, 1, -1)\in(S) \Leftrightarrow (3-1)^2+(1-2)^2+(-1+1)^2=R^2 \Leftrightarrow R^2=5.$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng :

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=5.$$

Ví dụ 5. Lập phương trình mặt cầu đi qua điểm A(3, 1, 0), B(5, 5, 0) và tâm $I\in Ox$.

Giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I\in Ox$, có dạng:

$$(x-a)^2+y^2+z^2=R^2.$$

- Điểm $A(3, 1, 0)\in(S) \Leftrightarrow (3-a)^2+1=R^2.$ (1)
- Điểm $B(5, 5, 0)\in(S) \Leftrightarrow (5-a)^2+25=R^2.$ (2)
- Lấy (1)-(2), ta được $4a-10=0 \Leftrightarrow a=10.$

  Thay a=10 vào (1), ta được $R^2=50$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng :

$$(x-10)^2+y^2+z^2=50.$$

Ví dụ 6. Cho hai điểm $A(a_1, b_1, c_1)$; $B(a_2, b_2, c_2)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

Giải:

Giả sử mặt cầu (S) có tâm I(a, b, c) và bán kính R, ta có

- Mặt cầu đường kính AB nên I là trung điểm AB và có toạ độ

$$I\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}, \frac{c_1+c_2}{2}\right).$$

- Bán kính R bằng nửa khoảng cách AB, nên:

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$\left(x-\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b_1+b_2}{2}\right)^2+\left(z-\frac{c_1+c_2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}[(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2]$$

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1. (CĐSP Hà nội-97): Cho mặt cầu (S) có phương trình : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z=0$.

a. Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của mặt cầu.

b. Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm (khác gốc toạ độ) của mặt cầu với các trục Ox, Oy, Oz. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

c. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ tâm cầu đến (ABC). Xác định toạ độ điểm H.

BÀI GIẢI

a. Chuyển hình cầu (S) về dạng chính tắc:

$$(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$$

Vậy: (S) có tâm I(1, 2, 2) và bán kính R=3.

b. Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm (khác gốc toạ độ) của mặt cầu với các trục Ox, Oy, Oz, ta có: A(2, 0, 0); B(0, 4, 0); C(0, 0, 4)

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (ABC), ta có:

$$\begin{cases} \vec{n}\perp\overrightarrow{AB}(-2,4,0) \\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}(-2,0,4) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n}\ (4, 2, 2),\ \text{chọn}\ \vec{n}\ (2, 1, 1).$$

Phương trình mặt phẳng (ABC) được xác định bởi:

$$(ABC): \begin{cases} \text{qua } A(2,0,0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(2,1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (ABC): 2(x-2)+y+z=0 \Leftrightarrow (ABC): 2x+y+z-4=0$$

c. Gọi (d) là đường thẳng qua I và vuông góc (ABC), khi đó:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } I(1,2,2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+t \\ z = 2+t \end{cases},\ t\in R$$

Điểm H chính là giao điểm của (d) và (ABC). Thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào phương trình (ABC), ta được:

$$2(1+2t)+2+t+2+t-4=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{3} \Rightarrow H(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}).$$

Bài 2. Cho họ mặt cong (S_m) có phương trình:

$$(S_m): x^2+y^2+z^2-2m^2x-4my+8m^2-4=0.$$

a. Tìm điều kiện của m để (S_m) là một họ mặt cầu.

b. CMR tâm của họ (S_m) luôn nằm trên một Parabol (P) cố định trong mặt phẳng Oxy, khi m thay đổi.

c. Trong mặt phẳng Oxy, gọi F là tiêu điểm của (P). Giả sử đường thẳng (d) đi qua F tạo với chiều dương của trục Ox một góc α và cắt (P) tại hai điểm M, N.

- Tìm toạ độ trung điểm E của đoạn MN theo α.
- Từ đó suy ra quỹ tích E khi α thay đổi.

BÀI GIẢI

a. Để (S_m) là một họ mặt cầu điều kiện cần và đủ là:

$$m^4+4m^2-8m^2+4\geq 0 \Leftrightarrow (m^2-2)^2\geq 0 \text{ luôn đúng } \forall m.$$

Vậy (S_m) luôn là phương trình của mặt cầu với mọi m

b. Khi đó: toạ độ tâm I_m của (S_m) là:

$$\begin{cases} x = m^2 \\ y = 2m \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ z = 0 \end{cases}.$$

Vậy I_m luôn nằm trên Parabol (P): $y^2=4x$ trong mặt phẳng Oxy.

c. Parabol (P): $y^2=4x$ có tiêu điểm F(1, 0).

- Phương trình đường thẳng (d) đi qua F tạo với chiều dương của trục Ox một góc α có dạng

$$(d): \begin{cases} \text{qua } F(1,0) \\ \text{hsg } k = \text{tg}\alpha \end{cases} \Leftrightarrow (d): y=(x-1)\text{tg}\alpha.$$

- Toạ độ giao điểm M, N của (P) và (d) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = (x-1)\text{tg}\alpha \end{cases} \Rightarrow x^2\text{tg}^2\alpha-2(\text{tg}^2\alpha+2)x+\text{tg}^2\alpha=0 \quad (1)$$

Ta có: $\Delta'=(\text{tg}^2\alpha+2)^2-\text{tg}^4\alpha=4\text{tg}^2\alpha+4>0\ \forall\alpha \Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt $M(x_M, y_M)$, $N(x_M, y_M)$ có hoành độ thoả mãn:

$$x_M + x_N = \frac{2(\text{tg}^2\alpha + 2)}{\text{tg}^2\alpha}.$$

- Gọi $E(x_E, y_E)$ là trung điểm của đoạn MN, ta có:

$$\begin{cases} x_E = \frac{1}{2}(x_M + x_N) \\ y_E = (x_E - 1)\text{tg}\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \frac{\text{tg}^2\alpha + 2}{\text{tg}^2\alpha} \\ y_E = \frac{1}{2}\left[\frac{2(\text{tg}^2\alpha + 2)}{\text{tg}^2\alpha} - 2\right]\text{tg}\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \frac{\text{tg}^2\alpha + 2}{\text{tg}^2\alpha} \\ y_E = \frac{2}{\text{tg}\alpha} \end{cases} \quad (I)$$

Khử α từ hệ (I) ta được $y_E^2=4x_E-2$

Vậy quĩ tích trung điểm E của đoạn MN thuộc Parabol (P_1): $y^2=4x-2$.

Bài 3. Lập phương trình mặt cầu đi qua điểm A(0, 1, 0), B(1, 0, 0), C(0, 0, 1) và tâm I nằm trên mặt phẳng (P): x+y+z-3=0.

BÀI GIẢI

Giả sử mặt cầu (S) có dạng:

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (đk $a^2+b^2+c^2-d \geq 0$).

- Điểm A(0, 1, 0)∈(S) ⇔ 1-2b+d=0. (1)
- Điểm B(1, 0, 0)∈(S) ⇔ 1-2a+d=0. (2)
- Điểm C(0, 0, 1)∈(S) ⇔ 1-2c+d=0. (3)
- Tâm I(a, b, c)∈(P) ⇔ a+b+c-3=0 (4)

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3), (4), ta được

a=1, b=1, c=1, d=1 (tmđk).

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-1=0$.

Bài 4. (CĐSP TP.HCM - 2000): Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 4 \end{cases}, (t \in R) \text{ và } (d_2): \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 4x + 4y + 3z - 12 = 0 \end{cases}.$$

a. CMR (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

c. Lập phương trình mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

BÀI GIẢI

a. Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(2, 1, 0)$, $\vec{a}_2(1, -1, 0) \Rightarrow \vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ không cùng phương.

Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2), ta có:

$$\begin{cases} 2t + t - 3 = 0 \\ 8t + 4t + 12 - 12 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm} \Rightarrow (d_1) \cap (d_2) = \varnothing.$$

Vậy (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Chuyển phương trình (d_2) về dạng tham số:

Lấy điểm $M(3, 0, 0) \in (d_2)$, khi đó:

$$(d_2): \begin{cases} \text{qua } M(3,0,0) \\ \text{vtcp } \vec{a_2}(1,-1,0) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x = 3 + u \\ y = -u \\ z = 0 \end{cases}, (u \in R).$$

Gọi AB là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2) ($A \in (d_1)$; $B \in (d)$). Khi đó, toạ độ của A, B theo thứ tự thoả mãn phương trình tham số của (d_1) và (d_2), tức là:

$A(2t, t, 4)$; $B(3+u, -u, 0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(u-2t+3, -u-t, -4)$.

Từ điều kiện

$$\begin{cases} AB \perp (d_1) \\ AB \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{a}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{a}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(u - 2t + 3) + 1.(-u - t) = 0 \\ 1.(u - 2t + 3) - 1.(-u - t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ u = -1 \end{cases}.$$

- Thay t=1 vào phương trình của (d_1) ta được A(2, 1, 4).
- Thay $u = \frac{25}{9}$ vào phương trình của (d_1) ta được B(2, 1, 0).

Khi đó: $d((d_1), (d_2)) = AB = 4$.

c. Mặt cầu (S) đường kính AB được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tam I la trung diem AB} \\ \text{Ban kinh } R = \frac{1}{2}AB \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tam } I(2,1,2) \\ \text{Ban kinh } R = 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=0$.

Bài 5 : Cho n điểm $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n, z_n)$ và n+1 số $k_1, k_2, ..., k_n$, k sao cho $k_1+k_2+...+k_n \neq 0$. Tìm tập hợp điểm M sao cho $k_1MA_1^2+k_2MA_2^2+...+k_nMA_n^2=k$.

BÀI GIẢI

Giả sử toạ độ của M(x, y, z), ta có:

$k_1MA_1^2+k_2MA_2^2+...+k_nMA_n^2=k$

$\Leftrightarrow k_1[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]+k_2[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2]+...+k_n[(x-x_n)^2+(y-y_n)^2+(z-z_n)^2]=k$

$\Leftrightarrow (k_1+k_2+...+k_n)(x^2+y^2+z^2)-2(k_1x_1+k_2x_2+...+k_nx_n)x-$

$-k_1y_1+k_2y_2+...+k_ny_n)y+k_1(x_1^2+y_1^2)+$

$+k_2(x_2^2+y_2^2)+...+k_n(x_n^2+y_n^2)=k$ (1)

Đặt:

$a=\frac{k_1x_1+...+k_nx_n}{k_1+...+k_n}$,

$b=\frac{k_1y_1+...+k_ny_n}{k_1+...+k_n}$,

$c=\frac{k_1(x_1^2+y_1^2)+...+k_n(x_n^2+y_n^2)-k}{k_1+...+k_n}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow$ $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

Vậy:

- Nếu $a^2+b^2-c>0$ thì tập hợp điểm M là đường tròn tâm I(a, b) bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
- Nếu $a^2+b^2-c=0$ thì tập hợp điểm M là điểm I(a, b).
- Nếu $a^2+b^2-c<0$ thì tập hợp điểm M ta một tập rỗng.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Trong các phương trình sau đây, phương trình nào là phương trình của mặt cầu, khi đó chỉ rõ tạo độ tâm và bán kính của nó, biết:

a. $x^2 + y^2 + z^2-2x -4y+6z + 2 = 0$.

b. $x^2 + y^2 + z^2- 2x+y-2z+9 = 0$.

c. $3x^2 +3y^2+3z^2-6x+ 3y-9z+3 = 0$.

d. $-x^2 - y^2 - z^2-+4x+2y-5z- 7 = 0$.

e. $2x^2 + y^2 + z^2- x+y - 2 = 0$.

Bài tập 2. Cho họ mặt cong (S_m) có phương trình:

(S_m): $x^2 + y^2 + z^2-4mx-2my-6z+m^2+4m= 0$.

a. Tìm điều kiện của m để (S_m) là một họ mặt cầu.

b. CMR tâm của (S_m) luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài tập 3. Cho họ mặt cong (S_m) có phương trình:

(S_m): $x^2 + y^2 + z^2-4mx-4m^2y+8m^2-5= 0$

a. Tìm điều kiện của m để (S_m) là một họ mặt cầu.

b. Tìm quĩ tích tâm của họ (S_m) khi m thay đổi.

c. Tìm điểm cố định M mà (S_m) luôn đi qua.

Bài tập 4. Cho họ mặt cong (S_α) có phương trình:

$$(S_m): x^2 + y^2 + z^2 - 2x\sin\alpha - 2y\cos\alpha - 3 = 0$$

a. Tìm điều kiện của α để (S_α) là một họ mặt cầu.

b. CMR tâm của họ (S_α) luôn chạy trên một đường tròn (C) cố định trong mặt phẳng Oxy khi α thay đổi.

c. Trong mặt phẳng Oxy, (C) cắt Oy tại A và B. Đường thẳng y=m ($-1<m<1$, $m\neq0$) cắt (C) tại T và S, đường thẳng qua A, T cắt đường thẳng qua B, S tại P. Tìm tập hợp các điểm P khi m thay đổi.

Bài tập 5. Lập phương trình mặt cầu (S) biết:

a. Tâm I(2, 1, -1) bán kính R=4.

b. Đi qua điểm A(2, 1, -3) và tâm I(3, -2, -1).

c. Đi qua điểm A(1, 3, 0), B(1, 1, 0) và tâm $I\in Ox$.

d. Hai đầu đường kính là A(-1, 2, 3), B(3, 2, -7).

Bài tập 6. Cho 3 đường thẳng (d_1), (d_2), (d_3) có phương trình:

$$(d_1): \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{1},\ (d_2): \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1},$$

$$(d_3): \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}.$$

a. Lập phương trình đường thẳng (d) cắt hai đường thẳng (d_1), (d_2) và song song với đường thẳng (d_3).

b. Giả sử $(d)\cap(d_1)=\{A\}$ và $(d)\cap(d_2)=\{B\}$. Lập phương trình mặt cầu đường kính AB.

Bài tập 7. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình là:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t,\ (t\in R); \\ z = 2t \end{cases}\quad (d_2): \begin{cases} x + 2z - 2 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}.$$

a. CMR (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

c. Lập phương trình mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

d. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng cách đều (d_1) và (d_2).

CHỦ ĐỀ 2
MẶT CẦU
TIẾP XÚC VỚI MẶT PHẲNG

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho mặt phẳng (P): $Ax+By+Cz+D=0$ ($A^2+B^2+C^2>0$).

Bài toán: Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) cho trước và thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) có tâm I(a, b, c) và bán kính R.

Bước 2: (S) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi:

$$d(I, (P))=R \Leftrightarrow \frac{|A.a+B.b+C.c+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=R. \quad (1)$$

Bước 3: Sử dụng điều kiện K để thiết lập thêm các phương trình theo a, b, c, R. Từ đó xác định được toạ độ tâm I và bán kính R.

Bước 4: Khi đó phương trình (S) được cho bởi:

$$(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Chú ý. Nếu giả thiết cho (S) tiếp xúc với (P) tại điểm $M(x_0, y_0, z_0)$, ta có được các điều kiện sau:

1. Tâm I thuộc đường thẳng (d) có phương trình cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M(x_0, y_0, z_0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(A, B, C) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}, t \in R.$$

Suy ra: $I(x_0+At, y_0+Bt, z_0+Ct)$.

2. (S) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi:

$IM=R$,

Ví dụ 1. Viết phương trình mặt cầu (S) biết:

a. Tâm I(1, 2, 3) và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $3x-4y-10=0$.

b. Bán kính R=3 và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $2x+2y+z+3=0$ tại điểm M(-3, 1, 1).

Giải.

a. Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi:

$$d(I, (P))=R \Leftrightarrow \frac{|3.1-4.2-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm I, tiếp xúc với (P), có dạng:

$(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9.$

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp "*Lấy học trò làm trung tâm*"
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách

b. Ta có:

- (S) tiếp xúc với (P) tại điểm M, suy ra I thuộc đường thẳng (d) có phương trình cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M(-3,1,1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,2,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in R.$$

Suy ra: I(-3+2t, 1+2t, 1+t).

- (S) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi:

$IM=R \Leftrightarrow IM^2=R^2 \Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow t=\pm 1.$

- Với $t_1=1$, suy ra tâm $I_1(-1, 3, 2)$, khi đó được (S_1) có phương trình là:

(S_1): $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$.

- Với $t_2=-1$, suy ra tâm $I_2(-5, -1, 0)$, khi đó được (S_2) có phương trình là:

(S_2): $(x+5)^2+(y+1)^2+z^2=9$.

Vậy tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý. Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), phương pháp giải được minh hoạ bằng ví dụ sau:

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn Oxyz cho đường thẳng (d) và hai mặt phẳng (P_1), (P_2) có phương trình :

$$(d): \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} t \in R,\ (P_1): 3x+4y+3=0,\ (P_2): 2x+2y-z+39=0$$

Viết phương trình mặt cầu có tâm I thuộc (d) và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2).

Giải.

Từ $I \in (d)$, ta được: I(t, 0, -1).

(S) tiếp xúc với (P_1) và (P_2) khi và chỉ khi:

$$d(I, (P_1))=d(I, (P_2))=R \Leftrightarrow \frac{|3t+3|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|2t+1+39|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = R$$

$$\Rightarrow |9t+9| = |10t+200| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -191 \\ t = -11 \end{array}\right..$$

- Với t=-191 suy ra: $I_1(-191, 0, -1)$ và $R_1=114$ ta được:

(S_1): $(x+191)^2+y^2+(z+1)^2=12996$.

- Với t=-11 suy ra: $I_2(-11, 0, -1)$ và $R_2=6$ ta được:

(S_2): $(x+11)^2+y^2+(z+1)^2=36$.

Vậy tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý. Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng song song với nhau (P_1) và (P_2), phương pháp giải đơn giản hơn, được minh hoạ bằng ví dụ sau:

Ví dụ 3. (ĐHAN khối A-98). Viết phương trình mặt cầu có tâm I thuộc (d) và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), biết:

$$(d): \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}, (P_1): x+2y+2z+3=0, (P_2): x+2y+2z+7=0$$

Giải.

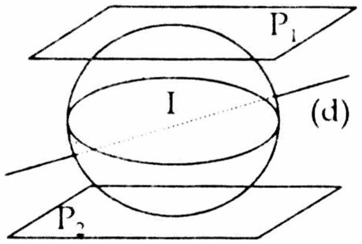
Gọi (S) là mặt cầu tâm $I(x_0, y_0, z_0)$, bán kính R thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét rằng $(P_1)//(P_2) \Rightarrow 2R=d((P_1), (P_2)) = \frac{4}{3} \Rightarrow R= \frac{2}{3}$.

Từ

$$\begin{cases} (S)txuc(P_1) \\ (S)txuc(P_2) \end{cases} \Rightarrow d(I, (P_1))= d(I, (P_2)) \Leftrightarrow x_0+2y_0+2z_0+5=0 \quad (1)$$

Từ $I \in (d)$



$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 + 1 = 0 \ (2) \\ x_0 - y_0 + z_0 - 1 = 0 \ (3) \end{cases}.$$

Với (1), (2) và (3), ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 + 2z_0 + 5 = 0 \\ x_0 + y_0 + z_0 + 1 = 0 \\ x_0 - y_0 + z_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow I(3, -1, -3).$$

- Vậy mặt cầu (S) có tâm I(3, -1, -3), bán kính $R= \frac{2}{3}$ có dạng:

$$(S): (x-3)^2+(y+1)^2+(z+3)^2= \frac{4}{9}.$$

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1. (Đề 87/Va): Lập phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng (d) và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), biết

$$(d): \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}, (P_1): x+2y-2z-2=0 \text{ và } (P_2): x+2y-2z+4=0.$$

BÀI GIẢI

Gọi (S) là mặt cầu tâm $I(x_0, y_0, z_0)$, bán kính R thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét rằng $(P_1)//(P_2) \Rightarrow 2R=d((P_1), (P_2))$ (1)

Lấy $A(0, 0, -1) \in (P_1)$, khi đó:

$$d((P_1), (P_2))=d(A, (P_2))= \frac{|0+0+2+4|}{\sqrt{1+4+4}} =2 \Rightarrow 2R=2 \Leftrightarrow R=1.$$

Từ (S) tiếp xúc với (P_1) và (P_2), ta được:

$$kc(I, (P_1))= kc(I, (P_2)) \Leftrightarrow \frac{|x_0 + 2y_0 - 2z_0 - 2|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|x_0 + 2y_0 - 2z_0 + 4|}{\sqrt{1+4+4}}$$

$$\Leftrightarrow x_0+2y_0-2z_0+1=0 \quad (2)$$

Từ $I \in (d)$, ta được:

$$\begin{cases} 2x_0 + 4y_0 - z_0 - 7 = 0 \ (3) \\ 4x_0 + 5y_0 + z_0 - 14 = 0 \ (4) \end{cases}.$$

Với (2), (3) và (4), ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 - 2z_0 + 1 = 0 \\ 2x_0 + 4y_0 - z_0 - 7 = 0 \\ 4x_0 + 5y_0 + z_0 - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 3 \\ z_0 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow I(-1, 3, 3).$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm I(-1, 3, 3), bán kính R=1 có dạng:

(S): $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$.

Bài 2 (ĐHNN I-99): Cho cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$$(d): \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}, \ (P): 2x+y-2z+2=0.$$

a. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng (d), tiếp xúc với mặt phẳng (P) và có bán kính bằng 1.

b. Gọi M là giao điểm của (P) với (d), T là tiếp điểm của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P). Tính độ dài đoạn MT

BÀI GIẢI

a. Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases}, \ t\in R.$$

Từ $I\in(d)$, ta được: I(1+3t, t-2, t).

(S) tiếp xúc với (P) và có bán kính bằng 1 khi và chỉ khi:

$$d(I, (P))=R \Leftrightarrow \frac{|2(1+3t)+t-2-2t+2|}{\sqrt{2^2+1+2^2}} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1}{5} \end{array}\right..$$

- Với t=-1 suy ra: $I_1(-2, -3, -1)$ ta được:

  (S_1): $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=1$.

- Với $t=\frac{1}{5}$ suy ra: $I_2(\frac{8}{5}, -\frac{9}{5}, \frac{1}{5})$ ta được:

  (S_2): $(x-\frac{8}{5})^2+(y+\frac{9}{5})^2+(z-\frac{1}{5})^2=1$.

Vậy tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta có:

- Xác định toạ độ điểm M

  Bằng cách thay phương trình tham số của (d) vào (P), ta được:

  $$2(1+3t)-2+t-2t+2=0 \Leftrightarrow t=-\frac{2}{5} \Rightarrow M(-\frac{1}{5}, -\frac{12}{5}, -\frac{2}{5}).$$

- Xác định toạ độ tiếp điểm T

  - Với (S_1)

    Đường thẳng (d_1) qua I_1 và vuông góc với (P) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } I_1(-2,-3,-1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,1,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = -1 - 2t \end{cases}, \ t\in R.$$

Bằng cách thay phương trình tham số của (d_1) vào (P), ta được:

$$2(-2+2t)-3+t-2(-1-2t)+2=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3} \Rightarrow T_1(-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}).$$

Khi đó $MT_1=\frac{\sqrt{666}}{15}$.

- Với (S_2)

Đường thẳng (d_1) qua I_1 và vuông góc với (P) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } I_1(\frac{8}{5}, -\frac{9}{5}, \frac{1}{5}) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,1,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 8/5 + 2t \\ y = -9/5 + t, \ t \in R. \\ z = 1/5 - 2t \end{cases}$$

Bằng cách thay phương trình tham số của (d_1) vào (P), ta được:

$$2(\frac{8}{5}+2t)-\frac{9}{5}+t-2(\frac{1}{5}-2t)+2=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{3} \Rightarrow T_2(\frac{14}{15}, -\frac{32}{15}, \frac{13}{15}).$$

Khi đó $MT_2=\frac{\sqrt{666}}{15}$.

Bài 3 (ĐHGTVT-99): Cho cho mặt phẳng (P): $16x-15y-12z+75=0$.

a. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm là gốc toạ độ, tiếp xúc với mặt phẳng (P).

b. Tìm toạ độ tiếp điểm H của mặt phẳng (P) với mặt cầu (S).

c. Tìm điểm đối xứng của gốc toạ độ O qua mặt phẳng (P).

BÀI GIẢI

a. Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi:

$$d(O, (P))=R \Leftrightarrow \frac{75}{\sqrt{16^2+15^2+12^2}}=3.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm O, tiếp xúc với (P), có dạng:

$$x^2+y^2+z^2=9.$$

b. Tìm toạ độ tiếp điểm H của mặt phẳng (P) với mặt cầu (S).

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có $\vec{n}$ (16, -15, -12).

Gọi (d) là đường thẳng thoả mãn:

$$(d) \begin{cases} \text{qua } O \\ (d)\perp(P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{qua } O \\ \text{vtcp } \vec{n}(16,-15,-12) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 16t \\ y = -15t, \ t \in R. \\ z = -12t \end{cases}$$

Toạ độ tiếp điểm H của mặt phẳng (P) với mặt cầu (S) chính là giao điểm của mặt phẳng (P) với đường thẳng (d).

Thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào (P), ta được:

$$16.16t-15.(-15t)-12.(-12t)+75=0 \Leftrightarrow t=-\frac{3}{25} \Rightarrow H(-\frac{48}{25}, \frac{45}{25}, \frac{36}{25}).$$

c. Gọi O_1 là điểm đối xứng của O qua mặt phẳng (P), khi đó toạ độ của O_1 được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_{O_1} = 2x_H \\ y_{O_1} = 2y_H \\ z_{O_1} = 2z_H \end{cases} \Rightarrow O_1(-\frac{96}{25}, \frac{90}{25}, \frac{72}{25}).$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Viết phương trình mặt cầu (S) biết:

a. Tâm I(1, 2, -2) và tiếp xúc với mặt phẳng (P): 6x-3y+2z-11=0.

b. (CĐGTVT - 2000): Tâm I(1, 4, -7) và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có phương trình : 6x+6y-7z+42=0.

c. Bán kính R=9 và tiếp xúc với (P): x+2y+2z+3=0 tại điểm M(1, 1, -3).

Bài tập 2. Viết phương trình mặt cầu có tâm I trên đường thẳng (d) và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) biết:

a. (ĐHL - 95): (d): $\frac{x-2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$,

(P_1): x+2y-2z-2=0 và (P_2): x+2y-2z+4=0.

b. (d): $\begin{cases} -x+4y+2z-7=0 \\ x+5y+4z-14=0 \end{cases}$, ($P_1$): 2x+2y-z-12=0 và ($P_2$): -2x+2y-z+8=0

c. (d): $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3+t \\ z=-2-t \end{cases}$ $t\in R$, (P_1): 3x-4y+2z-10=0 và (P_2): 2x-3y+4z-10=0.

Bài tập 3. (ĐHLN - 97): Cho đường thẳng (d) và hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), biết:

(d): $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$, ($P_1$): x+y-2z+5=0 và ($P_2$): 2x-y+z+2=0.

a. Gọi A, B là gia điểm của (d) với (P_1) và (P_2). Tính độ dài đoạn AB.

b. Viết phương trình mặt cầu có tâm I trên đường thẳng (d) và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2).

CHỦ ĐỀ 3
MẶT CẦU CẮT MẶT PHẲNG

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho mặt phẳng (P): $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2>0)$.

> **Bài toán:** Lập phương trình mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) cho trước theo giao tuyến là một đường tròn (C) và thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) có tâm I(a, b, c) và bán kính R.

Bước 2: $(S)\cap(P)=(C)$ có bán kính r, khi và chỉ khi:

$$R^2=r^2+d^2. \quad (1)$$

trong đó: $d=d(I, (P))$.

Bước 3: Sử dụng điều kiện K để thiết lập thêm các phương trình theo a, b, c, R. Từ đó xác định được toạ độ tâm I và bán kính R.

Bước 4: Khi đó phương trình (S) được cho bởi:

$$(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Chú ý.

1. Nếu $d=d(I, (P))=0 \Rightarrow r=R$ & $I\equiv H$. Ta gọi C(I, R) là đường tròn lớn của mặt cầu S(I, R).
2. Nếu giả thiết cho (C) có tâm $H(x_0, y_0, z_0)$, suy ra tâm I thuộc đường thẳng (d) có phương trình cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } H(x_0, y_0, z_0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(A, B, C) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}, t\in R.$$

   Suy ra: $I(x_0+At, y_0+Bt, z_0+Ct)$.
3. Nếu giả thiết cho (C) ngoại tiếp ΔABC, khi đó:
   - Nếu ΔABC đều thì $H(x_0, y_0, z_0)$ là trọng tâm ΔABC .
   - Nếu ΔABC vuông tại A thì $H(x_0, y_0, z_0)$ là trung điểm BC .

Ví dụ 1: Lập phương trình mặt cầu có tâm tại giao điểm I của mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) sao cho mặt phẳng (Q) cắt khối cầu theo thiết diện là hình tròn có diện tích 20π. Biết:

$$(d): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + t \end{cases}, (t\in R), (P): x-2y-z+3=0 \text{ và } (Q): 2x+y-2z-1=0.$$

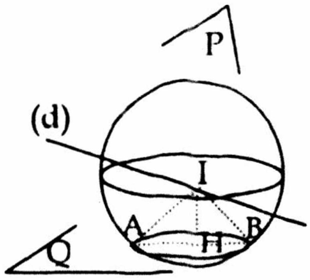
Giải.

Gọi (S) là mặt cầu có tâm I, bán kính R thoả mãn điều kiện đầu bài.

- Điểm $I=(P)\cap(d)$. Thay x, y, z từ phương trình của (d) vào phương trình của (P) ta được:

$$(-1+t)-2(3-t)-(-2+t)+3=0 \Leftrightarrow t=1.$$

Thay t=1 vào phương trình tham số của (d) ta tìm được: I(0, 2, -1).



- Mặt phẳng (Q)∩(S)=(C) có bán kính r, ta có:

  $r^2.\pi=16\pi \Rightarrow r^2=16$.

  và $R^2=r^2+d^2$,

trong đó:

$$d=d(I, (Q))=\frac{|2+2-1|}{\sqrt{4+1+4}}=1;$$

Từ đó, $R^2=17$.

Vậy mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=17$.

Ví dụ 2: Lập phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng (d) và cắt phẳng (P) theo thiết diện là đường tròn lớn có bán kính bằng 4. Biết:

$$(d): \begin{cases} x+z-1=0 \\ y-2=0 \end{cases}, \ (P): y-z=0.$$

Giải.

Gọi (S) là mặt cầu có tâm I, bán kính R thoả mãn điều kiện đầu bài.

- (S) ∩(P)=(C) đường tròn lớn, suy ra R=4.
- Điểm I=(P)∩(d), toạ độ I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+z-1=0 \\ y-2=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow I(-1, 2, 2).$$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình: $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=16$.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1. (ĐHKT - 94): Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P), (Q) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(P): 5x-4y+z-6=0, (Q): 2x-y+z+7=0 \text{ và } (d): \begin{cases} x-y+2z-3=0 \\ -x+3y+z=0 \end{cases}.$$

a. Viết phương trình mặt cầu có tâm tại giao điểm I của mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) sao cho mặt phẳng (Q) cắt khối cầu theo thiết diện là hình tròn có diện tích $20\pi^2$.

b. Tìm toạ độ của điểm I_1 đối xứng của I qua mặt phẳng (Q).

BÀI GIẢI

a. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I, bán kính R thoả mãn điều kiện đầu bài.

- Điểm I=(P)∩(d), toạ độ của I là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} 5x-4y+z-6=0 \\ x-y+2z-3=0 \\ -x+3y+z=0 \end{cases} \Rightarrow I(1, 0, 1).$$

- Mặt phẳng (Q)∩(S)=(C) có bán kính r, ta có:

  $r^2.\pi=20\pi^2 \Rightarrow r^2=20$.

  và $R^2=r^2+d^2$,

trong đó:

$$d=d(I, (Q))=\frac{|2.1-1.0+1.1+7|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{10}{\sqrt{6}} \Rightarrow R^2=\frac{110}{3}.$$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình : $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=\frac{110}{3}$.

b. Gọi $\vec{n}$ là vtpt tuyến của (Q), ta có: $\vec{n}(2, -1, 1)$.

Gọi (d_1) là đường thẳng qua I và vuông góc với (Q), vậy:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } I(1,0,1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,-1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in R.$$

Khi đó, $\{H\}=(d)\cap(Q)$. Bằng cách thay x, y, z của (d) vào (Q), ta được:

$$2(1+2t)-(-t)+(1+t)+7=0 \Leftrightarrow t=-\frac{5}{3} \Rightarrow H(-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{2}{3}).$$

Điểm I_1 đối xứng của I qua (Q), khi đó toạ độ của I_1 được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_{I_1} = 2x_H - x_I \\ y_{I_1} = 2y_H - y_I \\ z_{I_1} = 2z_H - z_I \end{cases} \Rightarrow I_1(-\frac{17}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{7}{3}).$$

Bài 2 (ĐHSP Vinh - 99): Cho điểm I(1, 2, -2), đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình:

(d): 2x-2=y+3=z, (P): 2x+2y+z+5=0.

a. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I sao cho mặt phẳng (P) cắt khối cầu theo thiết diện là hình tròn có chu bằng 8π.

b. CMR mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng (d).

c. Lập phương trình mặt phẳng chứa (d) và tiếp xúc với (S).

BÀI GIẢI

a. Ta có mặt phẳng $(P)\cap(S)=(C)$ có bán kính r, ta có:

$2r.\pi=8\pi \Rightarrow r=4$.

và $R^2=r^2+d^2$,

trong đó:

$$d=d(I, (P))= \frac{|2.1+2.2-2+5|}{\sqrt{4+4+1}} =3;$$

Từ đó, $R^2=5$.

Vậy mặt cầu (S) có phương trình :

(S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$.

b. Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (S) là:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2 = 25 \\ 2x-2 = y+3 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/3 \\ y = -5/3 \\ z = 4/3 \end{cases} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy mặt cậu (S tiếp xúc với đường thẳng (d) tại điểm $M(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$.

c. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và tiếp xúc với (S), khi đó:

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } M(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3}) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{MI}(\frac{2}{3}, -\frac{11}{3}, \frac{10}{3}) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 6x-33y+30z-105=0.$$

Bài 3. Trong không gian Oxyz, cho ΔABC có phương trình các cạnh là:

$$(AB): \begin{cases} x - 5y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}, (BC): \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases} \text{ và } (AC): \frac{x-8}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}.$$

a. Xác định toạ độ các đỉnh của ΔABC.

b. Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm I thuộc mặt phẳng (P): $18x-35y-17z-2=0$.

BÀI GIẢI

a. Ta có: $A=(AB)\cap(AC)$, $B=(AB)\cap(BC)$, $C=(BC)\cap(AC)$, suy ra A(7, 1, 0), B(-3, -1, 0), C(3, 5, 0).

b. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I, bán kính R thoả mãn điều kiện đầu bài.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (ABC) $\Rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Nhận xét rằng $(BC)\perp(AC) \Rightarrow$ H là trung điểm của AB, do đó: H(2, 0, 0).

Suy ra tâm I thuộc đường thẳng (d) có phương trình cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } H(2,0,0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(0,0,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 \\ y = 0, \ t \in R. \\ z = t \end{cases}$$

Suy ra: I(2, 0, t).

Mặt khác $I \in (P)$, suy ra: $36-17t-2=0 \Leftrightarrow t=2$

Khi đó: tâm I(2, 0, 2) và bán kính $R^2=IA^2=30$.

Vậy mặt cầu (S) có phương trình : $(x-2)^2+y^2+(z-2)^2=30$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Lập phương trình mặt cầu có tâm tại giao điểm I của mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) sao cho mặt phẳng (Q) cắt khối cầu theo thiết diện là hình tròn có diện tích 12π. Biết:

a. $(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, (t \in R)$, (P): $x-y-z+3=0$.

b. $(d): \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$ và (P): $x+y-2=0$.

Bài tập 2. Lập phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng (d) và cắt phẳng (P) theo thiết diện là đường tròn lớn có bán kính bằng 18. Biết:

$$(d): \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}, (t \in R) \text{ và } (P): y+4z+17=0.$$

Bài tập 3. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm A(0, 0, -3), B(2, 0, -1) và mặt phẳng (P): $3x-8y+7z-1=0$.

a. (HVNH - 2000): Tìm toạ độ điểm C nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABC là tam giác đều.

b. Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm I thuộc mặt phẳng (P): $x-y-z-2=0$.

CHỦ ĐỀ 4
MẶT CẦU TIẾP XÚC VỚI ĐƯỜNG THẲNG

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I(a, b, c) và tiếp xúc với đường thẳng (d) cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) có bán kính R.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (d).

Xác định toạ độ H.

Bước 2: (S) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi:

IH=R,

Bước 3: Khi đó phương trình (S) được cho bởi:

(S): $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Ví dụ 1. Lập phương trình mặt cầu (S) biết:

a. Tâm I(1, 2, -1) và tiếp xúc với đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d): \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

b. Tâm I(1, 2, -1) và tiếp xúc với đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d): \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}$$

Giải.

a. Giả sử mặt cầu (S) có bán kính R.

Goi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng (d).

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix}\right) = \vec{a}\,(0, -1, 1)$$

Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn :

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (P)\perp(d) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A(1,2,-1) \\ \text{vtpt } \vec{a}(0,-1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): y-z-3=0.$$

Ta có $H=(d)\cap(P)$, toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow H(2, 2, -1).$$

(S) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi: $R^2=IH^2=1$.

Vậy mặt cầu (S) có phương trình:

(S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=1$.

b. Giả sử mặt cầu (S) có bán kính R.

Goi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng (d).

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có $\vec{a}$ (3, -2, 2).

- Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, (t \in R).$$

- Xác định H:

Vì $H \in (d) \Rightarrow H(3t-1, -2t+2, 2t+2)$ và $\overrightarrow{IH}$ (3t-2, -2t, 2t+3).

Vì $IH \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 3(3t-2)-2(-2t)+2(2t+3)=0 \Leftrightarrow t=0$.

Vậy $\overrightarrow{IH}$ (-2, 0, 3).

(S) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi: $R^2=IH^2=13$.

Vậy mặt cầu (S) có phương trình:

(S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=13$.

Bài toán 2: Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng (d) tại điểm $H(x_0, y_0, z_0)$ và thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: (S) tiếp xúc với (d) tại điểm $H(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow$ tâm I thuộc mặt phẳng (P) có phương trình cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } H(x_0, y_0, z_0) \\ (P) \perp (d) \end{cases}.$$

Bước 2: Sử dụng điều kiện K, ta xác định được toạ độ tâm I.

Bước 3: (S) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi IH=R.

Bước 4: Khi đó phương trình (S) được cho bởi:

(S): $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Ví dụ 2. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d) và (Δ), biết:

$$(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}, t \in R; (\Delta): \begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 3x - y - 2z + 7 = 0 \end{cases}.$$

Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với (d) tại điểm H(3, 1, 3) và có tâm thuộc (Δ).

Giải.

- (S) tiếp xúc với (d) tại điểm H, suy ra tâm I thuộc mặt phẳng (P) có phương trình cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } H(3,1,3) \\ \text{vtpt } \vec{n}(2,-1,3) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2x-y+3z-14=0.$$

- Khi đó, I=(P)∩(Δ), toạ độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x - y + 3z - 14 = 0\\ x - 3y + 1 = 0\\ 3x - y - 2z + 7 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -1\\ y = 0\\ z = 2\end{cases} \Rightarrow I(-1, 0, 2).$$

- (S) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi $R^2=IH^2=18$.
- Vậy mặt cầu (S) có phương trình: $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=18$.

Bài toán 3: Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với 2 đường thẳng cắt nhau (d_1), (d_2) (giả sử $(d_1)\cap(d_2)=\{M\}$) cho trước và thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ⇒ tâm I thuộc mặt phẳng phân giác (P) của (d_1) và (d_2).

Bước 2: Xác định phương trình (P).

- Lấy $A\in(d_1)$, $(A\neq M)$.
- Tìm điểm $B\in(d_2)$ thoả mãn: AM=BM.
- Phương trình mặt phẳng phân giác (P) được xác định bởi:

$$(P): \begin{cases}\text{qua } M\\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB}\end{cases}.$$

Bước 3: Sử dụng điều kiện K để xác định được toạ độ tâm I.

Bước 4: Tính bán kính R. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (S) với tâm I(a, b, c) có phương trình:

$$(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

(S) tiếp xúc với (d) ⇔ hệ phương trình tạo bởi (S) và (d) có nghiệm kép ⇒ R.

Cách 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (d).

Xác định toạ độ H.

(S) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi: IH=R,

Bước 5: Thiết lập phương trình của (S).

Ví dụ 3: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), cho bởi:

$$(d_1): \frac{x}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1} \text{ và } (d_2): \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{0}$$

a. CMR(d_1) và (d_2) cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm của chúng.

b. Lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (d), có phương trình :

$$(d): \begin{cases}x = 1 + t\\ y = t\\ z = -2 + t\end{cases}, t\in R.$$

Giải.

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2), ta được: $(d_1)\cap(d_2)=I(0, 1, 0)$.

b. Giả sử mặt cầu (S) có tâm I bán kính R thoả mãn điều kiện đầu bài.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) $\Rightarrow$ tâm I thuộc mặt phẳng phân giác (P) của (d_1) và (d_2). Ta đi xác định phương trình (P).

Lấy $A(0, 1, 2) \in (d_1)$, $(A \neq I)$.

Gọi $B(2u-2, 1, 0) \in (d_2)$ thoả mãn:

$$AI=BI \Leftrightarrow AI^2=BI^2 \Leftrightarrow 4=(2u-2)^2 \Leftrightarrow u=0 \vee u=2.$$

Vậy tồn tại hai điểm : $B_1(-2, 1, 0)$ & $B_2(2, 1, 0)$ thoả mãn.

Ta có:

- Với $B_1(-2, 1, 0)$ $\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng phân giác thứ nhất được xác định bởi:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } I(0,1,0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB_1}(-2,0,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): x+z-1=0.$$

Khi đó tâm $I_1=(P_1) \cap (d)$. Bằng cách thay phương trình của (d) vào (P), ta được:

$$(1+t)+(-2+t)-1=0 \Leftrightarrow 2t-2=0 \Leftrightarrow t=1$$

Suy ra tâm $I_1(2, 1, -1) \Rightarrow (S_1): (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=R^2$.

(S_1) tiếp xúc với (d_1)

$\Leftrightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm kép:

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2 = R^2 \\ \dfrac{x}{0} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-1}{-1} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ phương trình $t^2-2t+5-R^2=0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'=0 \Leftrightarrow R^2=4$.

Vậy, phương trình mặt cầu (S_1) có dạng: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$.

- Với $B_2(2, 1, 0)$ $\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng phân giác thứ hai được xác định bởi:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } I(0,1,0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB_2}(2,0,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): x-z-1=0.$$

Khi đó tâm $I_2=(P_2) \cap (d)$. Bằng cách thay phương trình của (d) vào (P), ta được:

$$(1+t)-(-2+t)-1=0 \text{ vô nghiệm}$$

Kết luận: tồn tại duy nhất mặt cầu (S_1) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý. Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đường thẳng song song với nhau (d_1) và (d_2), phương pháp giải đơn giản hơn.

Bài toán 4: Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với 2 đường thẳng (d_1), (d_2) song song với nhau cho trước và thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) $\Rightarrow$ tâm I thuộc mặt phẳng (P) song song với (d_1), (d_2) và vuông góc với mặt phẳng chứa (d_1), (d_2).

Bước 2: Xác định phương trình (P).

- Lấy $A \in (d_1)$.
- Gọi B là hình chiếu vuông góc của A lên (d_2). Tìm toạ độ của B.
- Gọi M là trung điểm AB, suy ra toạ độ của M.
- Phương trình mặt phẳng phân giác (P) được xác định bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

Bước 3: Sử dụng điều kiện K để xác định được toạ độ tâm I.

Bước 4: Tính bán kính R. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (S) với tâm I(a, b, c) có phương trình:

$$(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

(S) tiếp xúc với (d) $\Leftrightarrow$ hệ phương trình tạo bởi (S) và (d) có nghiệm kép $\Rightarrow$ R.

Cách 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (d).

Xác định toạ độ H.

(S) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi: IH=R,

Bước 5: Thiết lập phương trình của (S).

Ví dụ 4. Trong không gian Oxyz, cho:

$$(d): \begin{cases} 2x - y + z - 5 = 0 \\ x - 3y - z + 3 = 0 \end{cases}, (d_1): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 - t \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in R).$$

a. Chứng tỏ rằng (d_1), (d_2) song song.

b. Viết phương trình mặt cầu có tâm I thuộc (d) và tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

Giải.

a. Gọi $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), khi đó:

$$\vec{a}_1 (2, -1, -1) \text{ và } \vec{a}_2 (2, -1, -1) \Rightarrow \vec{a}_1 // \vec{a}_2.$$

Mặt khác hệ phương trình tạo bởi (d_1), (d_2) vô nghiệm.

Vậy (d_1), (d_2) song song với nhau.

b. Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) $\Rightarrow$ tâm I thuộc mặt phẳng (P) song song với (d_1), (d_2) và vuông góc với mặt phẳng chứa (d_1), (d_2). Ta đi xác định phương trình (P).

Lấy $A(3, 1, 5) \in (d_1)$, gọi B là hình chiếu vuông góc của A lên (d_2), ta có:

$$B(3+2t, -3-t, 1-t) \Rightarrow \overrightarrow{AB} (2t, -4-t, -4-t).$$

Vì $AB \perp (d_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{a}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{a}_2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2.2t-1(-4-t)-1.(-4-t)=0 \Leftrightarrow 6t+8=0 \Leftrightarrow t=-\frac{4}{3}.$$

Suy ra: $B(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$ và $\overrightarrow{AB}(-\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$ chọn $\vec{n}$ (1, 1, 1).

Gọi M là trung điểm AB, ta được: $M(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{11}{3})$.

Phương trình mặt phẳng (P) được xác định bởi:.

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M \\ \text{vtpt } \vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): x+y+z-5=0.$$

Khi đó tâm I=(P)∩(d), toạ độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z-5=0 \\ 2x-y+z-5=0 \\ x-3y-z+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow I(2, 1, 2).$$

Vậy (S) có phương trình: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=R^2$.

(S) tiếp xúc với (d_1) ⇔ hệ phương trình sau có nghiệm kép:

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=R^2 \\ x=3+2t \\ y=1-t \\ z=5-t \end{cases}$$

⇔ phương trình $3t^2-2t+10-R^2=0$ có nghiệm kép ⇔ $\Delta'=0$ ⇔ $R^2=\frac{29}{3}$.

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\frac{29}{3}$.

Bài toán 5: Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với 2 đường thẳng chéo nhau (d_1), (d_2) cho trước và thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ⇒ tâm I thuộc đường thẳng $(d)=\{E \mid d(E, (d_1))= d(E, (d_2))\}$.

Bước 2: Xác định phương trình (d).

- Lấy $A_1, B_1 \in (d_1)$ và $A_2, B_2 \in (d_2)$.
- Gọi E_1, E_2 theo thứ tự là trung điểm A_1A_2 và B_1B_2, kiểm tra điều kiện $E_1 \neq E_2$
- Phương trình đường thẳng (d) được xác định bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } E_1 \\ \text{vtpt } \overrightarrow{E_1E_2} \end{cases}.$$

Bước 3: Sử dụng điều kiện K để xác định được toạ độ tâm I.

Bước 4: Tính bán kính R. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (S) với tâm I(a, b, c) có phương trình:

$$(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

(S) tiếp xúc với (d_1) ⇔ hệ phương trình tạo bởi (S) và (d_1) có nghiệm kép ⇒ R.

Cách 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (d_1). Xác định H.

(S) tiếp xúc với (d_1) khi và chỉ khi: IH=R,

Bước 5: Thiết lập phương trình của (S).

Ví dụ 5: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, (t \in R); \quad (d_2): \begin{cases} x = 2 - 2u \\ y = 3 \\ z = u \end{cases}, (u \in R)$$

a. CMR(d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1), (d_2) và có tâm thuộc mặt phẳng (P): x+y+z-6=0.

Giải.

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2):

$$\begin{cases} 2 + t2 - 2u \\ 1 - t = 3 \\ 2t = u \end{cases} \text{ vô nghiệm} \Rightarrow (d_1) \cap (d_2) = \varnothing.$$

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là một vtcp của đường thẳng (d_1) và (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(1, -1, 2)$ và $\vec{a}_2(-2, 0, 1) \Rightarrow \vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$ không cùng phương.

Vậy hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) $\Rightarrow$ tâm I thuộc đường thẳng $(d) = \{E \mid d(E, (d_1)) = d(E, (d_2))\}$.

Phương trình (d) được xác định bằng cách:

- Lấy $A_1(2, 1, 0)$, $B_1(4, -1, 4) \in (d_1)$ và $A_2(2, 3, 0)$, $B_2(-2, 3, 2) \in (d_2)$.
- Gọi E_1, E_2 theo thứ tự là trung điểm A_1A_2 và B_1B_2, ta có:

  $E_1(2, 2, 0)$ & $E_2(1, 1, 3)$.
- Phương trình đường thẳng (d) được xác định bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } E_1(2,2,0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{E_1E_2}(-1,-1,3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}, (t \in R).$$

Khi đó: $I = (d) \cap (P)$. Bằng cách thay x, y, z từ phương trình của (d) vào phương trình của (P), ta được:

$2 - t + 2 - t + 3t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow$ tâm I(0, 0, 6).

Khi đó (S) với tâm I(0, 0, 6) có phương trình: $x^2 + y^2 + (z-6)^2 = R^2$. (1)

Mặt cầu (S) tiếp xúc với (d_1) $\Leftrightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm kép

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-6)^2 = R^2 \\ x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ phương trình $6t^2 - 22t + 41 - R^2 = 0$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 6R^2 - 125 = 0 \Leftrightarrow R^2 = \frac{125}{6}$.

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + (z-6)^2 = \frac{125}{6}$.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1. Trong không gian Oxyz, cho điểm I(3, 2, 4) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{1}.$$

a. (Đề 60-Va): Lập phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với đường thẳng (d) và cắt đường thẳng đó.

b. Lập phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với (d).

BÀI GIẢI

a. Gọi (d_1) là đường thẳng qua I vuông góc với (d) và cắt (d), vậy (d_1) qua I và H (H là hình chiếu vuông góc của I lên (d)).

- Xác định H.

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có: $\vec{a}$ (2, 4, 1).

Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = -3 + t \end{cases}, (t \in R).$$

Vì $H \in (d)$, nên có toạ độ H(2t, 4t, -3+t). Ta có $\overrightarrow{IH}$ (2t-3, 4t-2, t-7).

Vì $IH \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-3)+4(4t-2)+t-7=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(2, 4, -2)$.

- Phương trình (d_1), được xác định bởi:

$$\begin{cases} \text{qua } I(3,2,4) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IH}(-1,2,-6) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{-6}.$$

b. Mặt cầu (S) tiếp xúc với (d) $\Leftrightarrow R^2 = IH^2 = 41$.

Vậy phương trình của (S) có dạng: $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=41$.

Bài 2. Trong không gian Oxyz, cho điểm I(2, -1, 0) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} 5x + y + z + 2 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}.$$

a. (ĐH.TM - 2000): Lập phương trình đường thẳng qua I và vuông góc với đường thẳng (d) và cắt đường thẳng đó.

b. Lập phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với (d).

BÀI GIẢI

a. Gọi (d_1) là đường thẳng qua I vuông góc với (d) và cắt (d), vậy (d_1) qua I và H (H là hình chiếu vuông góc của I lên (d)).

- Xác định H.

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có: $\vec{a}$ (-1, 3, 2).

Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn :

$$(P): \begin{cases} \text{qua } I \\ (P) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } I(2,-1,0) \\ \text{vtpt } \vec{a}(-1,3,2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x-3y-2z-5=0.$$

Ta có $H=(d)\cap(P)$, toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-3y-2z-5=0 \\ 5x+y+z+2=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow H(0,-1,-1).$$

- Phương trình (d_1), được xác định bởi:

$$\begin{cases} \text{qua } I(2,-1,0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{HI}(2,0,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1}.$$

Chú ý. Có thể xác định được phương trình (d_1) bằng cách:

- Dựng (P_1) thoả mãn :

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } A \\ (P_1)\perp(d) \end{cases}$$

- Dựng (P_2) thoả mãn :

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d)\subset(P_2) \end{cases}.$$

- Khi đó $(d_1)=(P_1)\cap(P_1)$.

b. Mặt cầu (S) tiếp xúc với (d) $\Leftrightarrow R^2=IH^2=5$.

Vậy phương trình của (S): $(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=5$.

Bài 3 Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình

$$(d_1): \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=-1 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x=2t_1 \\ y=1+t_1 \\ z=t_1 \end{cases} \quad (t, t_1\in R).$$

a (ĐHLN - 96): CMR hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P), (Q) song song với nhau và lần lượt chứa (d_1), (d_2). Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

b Lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1), (d_2) và có tâm thuộc mặt phẳng (P) có phương trình: $2x-y+z-3=0$.

BÀI GIẢI

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2):

$$\begin{cases} 1-t=2t_1 \\ t=1+t_1 \\ -1=t_1 \end{cases} \text{ vô nghiệm} \Rightarrow (d_1)\cap(d_2)=\varnothing.$$

Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là một vtcp của đường thẳng (d_1) và (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(1, 1, 0)$ và $\vec{a}_2(2, 1, 1) \Rightarrow \vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$ không cùng phương.

Vậy hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) $\Rightarrow$ tâm I thuộc đường thẳng $(d)=\{E \mid d(E, (d_1))= d(E, (d_2))\}$.

Phương trình (d) được xác định bằng cách:

- Lấy $A_1(1, 0, -1)$, $B_1(0, 1, -1)\in(d_1)$ và $A_2(2, 2, 1)$, $B_2(4, 3, 2)\in(d_2)$.
- Gọi E_1, E_2 theo thứ tự là trung điểm A_1A_2 và B_1B_2, ta có:

$$E_1(\frac{3}{2}, 1, 0) \ \& \ E_2(2, 2, \frac{1}{2}).$$

- Phương trình đường thẳng (d) được xác định bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } E_1(\frac{3}{2}, 1, 0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{E_1E_2}(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 3/2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}, (t \in R).$$

Khi đó: $I=(d)\cap(P)$. Bằng cách thay x, y, z từ phương trình của (d) vào phương trình của (P), ta được:

$$2.(\frac{3}{2}+t)-(1+2t)+t-3=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow \text{tâm } I(\frac{5}{2}, 3, 1).$$

Khi đó (S) với tâm $I(\frac{5}{2}, 3, 1)$ có phương trình:

$$(S): (x-\frac{5}{2})^2+(y-3^2+(z-1)^2=R^2.$$

Mặt cầu (S) tiếp xúc với (d_1) $\Leftrightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm kép

$$\begin{cases} (x-\frac{5}{2})^2+(y-3)^2+(z-1)^2=R^2 \\ x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ phương trình $2t^2-3t+\frac{61}{4}-R^2=0$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta'=0 \Leftrightarrow 8R^2-113=0 \Leftrightarrow R^2=\frac{113}{8}$.

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng: $(x-\frac{5}{2})^2+(y-3^2+(z-1)^2=\frac{113}{8}$.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Viết phương trình mặt cầu (S) biết:

a. Tâm I(1, 2, -1) và tiếp xúc với đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}, (t \in R).$$

b. Tâm I(3, -1, 2) và tiếp xúc với đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d): \begin{cases} 2x - y - 2z - 3 = 0 \\ 2x - 2y - 3z - 17 = 0 \end{cases}$$

Bài tập 2. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d) và (Δ), biết:

$$(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, t \in R; (\Delta): \begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với (d) tại điểm H(3, 1, 3) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ).

Bài tập 3. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

$$(d_1): \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} 3x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}.$$

a. CMR hai đường thẳng đó cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm I của chúng.

b. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

c. Lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases}$$

Bài tập 4. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

$$(d_1): \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}, \ (t \in R), \ (d_2): \begin{cases} 4x + y - 19 = 0 \\ x - z + 15 = 0 \end{cases}.$$

a. CMR hai đường thẳng đó cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm I của chúng.

b. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

c. Lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (d): $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-9}{4}$

Bài tập 5. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

$$(d_1): \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{-4} \text{ và } (d_2): \frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{12}.$$

a. CMR hai đường thẳng đó song song với nhau.

b. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

c. Lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}, \ (t \in R).$$

Bài tập 6. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

$$(d_1): \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}, \ (d_2): \frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+18}{4}.$$

a. CMR hai đường thẳng đó song song với nhau.

b. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

c. Lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in R).$$

Bài tập 7. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = u + 2 \\ y = -3 + 2u \\ z = 3u + 1 \end{cases}, (t, u \in R).$$

a. CMR hai đường thẳng đó chéo nhau với nhau.

b. Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

c. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

d. Lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1), (d_2) và có tâm thuộc mặt phẳng (P): xy+z-2=0.

Bài tập 8. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết

$$(d_1): \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x - 2y - 2z + 9 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

a. CMR hai đường thẳng đó chéo nhau với nhau.

b. Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

c. Lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1), (d_2) và có tâm thuộc mặt phẳng (P): 2x-y+3z-6=0.

CHỦ ĐỀ 5
MẶT CẦU CẮT ĐƯỜNG THẲNG

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Lập phương trình mặt cầu (S) cắt đường thẳng (d) cho trước tại hai điểm AB có độ dài bằng l và thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) có tâm I(a, b, c) và bán kính R.

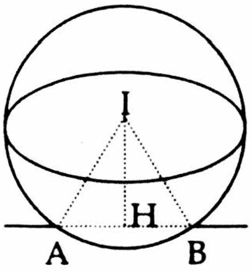
Bước 2: Dựa vào điều kiện K, đi xác định tọa độ tâm I(a, b, c).

Bước 3: Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (d). Xác định H.

$\Rightarrow$ Độ dài IH.

Bước 4: $(S)\cap(d)=\{A, B\}$ với AB=l khi và chỉ khi:

$$R^2=IA^2=AH^2+IH^2=\frac{AB^2}{4}+IH^2=\frac{l^2}{4}+IH^2.$$



Bước 4: Khi đó phương trình (S) được cho bởi:

$$(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Ví dụ 1: (ĐHQG TPHCM Khối A - 2000): Cho điểm I(1,1,1) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0 \\ 2y + z + 5 = 0 \end{cases}.$$

Lập phương trình mặt cầu tâm I(2, 3, -1) cắt đường thẳng (d) tại hai điểm A và B sao cho AB=16.

Giải.

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của I xuống AB $\Rightarrow$ H là trung điểm AB.
- *Xác định H.*

  Gọi $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta có:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}\,(-4, -1, 2).$$

Cách 1.

- Gọi (P) là mặt phẳng qua I và vuông góc với (d), ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } I(1,1,1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(-4,-1,2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 4x+y-2z-3=0.$$

- Điểm $H=(P)\cap(d)$, toạ độ của H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x + y - 2z - 3 = 0 \\ x - 2y + z - 9 = 0 \\ 2y + z + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow H(2, -3, 1) \;\&\; IH^2=17.$$

Cách 2. Lấy điểm A(14, 0, -5)∈(d).

- Chuyển phương trình (d) về dạng tham số, có dạng:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(14,0,-5) \\ \text{vtcp } \vec{a}(-4,-1,2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 14 - 4t \\ y = -t \\ z = -5 + 2t \end{cases}, t \in R.$$

- Điểm H∈(d), có toạ độ H(14-4t, -t, -5+2t) ⇒ $\overrightarrow{HI}$ (4t-13, t+1, 6-2t).
- Vì $\overrightarrow{HI}$ ⊥(d) ⇔ $\overrightarrow{HI}.\vec{a}$ =0 ⇔ -4.(4t-13)-1.(t+1)+2.(6-2t)=0 ⇔ t=3.
- Vậy, H(2, -3, 1) & IH^2=17.

■ (S)∩(d)={A, B} với AB=16 khi và chỉ khi:

$$R^2=IA^2=AH^2+IH^2=\frac{AB^2}{4}+IH^2=81$$

Khi đó phương trình mặt cầu (S) tâm I(1, 1, 1) bán kính R^2=81 có dạng:

(S): $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=81$.

Chú ý. Trong trường hợp biết được toạ độ hai điểm A, B, ta lựa chọn phương pháp được minh hoạ bằng ví dụ sau:

Ví dụ 2. Lập phương trình mặt cầu đi qua điểm A(3, 1, 0), B(5, 5, 0) và tâm I thuộc Ox.

Giải.

Mặt cầu (S) đi qua A, B ⇒ tâm I∈(P) là mặt phẳng trung trực của AB.

Gọi E là trung điểm AB ⇒ E(4, 3, 0).

Khi đó phương trình (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } E(4,3,0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB}(2,4,0) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x+2y-10=0.$$

Tâm I=(P)∩(d), toạ độ của I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 2y - 10 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow I(10, 0, 0)$$

Suy ra $R^2=IA^2=50$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng : $(x-10)^2+y^2+z^2=50$.

Chú ý. Tuy nhiên bài toán trên có thể giải đơn giản hơn như sau:

- Vì I∈Ox ⇒ I(a, 0, 0).
- Vì A, B∈(S) ⇒ IA=IB ⇔ $IA^2=IB^2$ ⇔ $(a-3)^2+1=(a-5)^2+25$ ⇔ a=10.
- Khi đó $R^2=IA^2=50$.
- Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng:

  (S): $(x-10)^2+y^2+z^2=50$.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1. (Đề 81/Va): Lập phương trình mặt cầu tâm I(2, 3, -1) cắt đường thẳng (d): có phương trình

$$(d):\begin{cases}5x-4y+3z+20=0\\3x-4y+z-8=0\end{cases}$$

tại hai điểm A và B sao cho AB=16.

BÀI GIẢI

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của I xuống AB ⇒ H là trung điểm AB.
- *Xác định H.*

  Gọi $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta có:

  $$\vec{a}\left(\begin{vmatrix}-4 & 3\\-4 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 5\\1 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}5 & -4\\3 & -4\end{vmatrix}\right)=\vec{a}\ (8, 4, -8)\ \text{chọn}\ \vec{a}\ (2, 1, -2).$$

Cách 1.

- Gọi (P) là mặt phẳng qua I và vuông góc với (d), ta có:

  $$(P):\begin{cases}\text{qua } I(2,3,-1)\\\text{vtpt } \vec{n}(2,1,-2)\end{cases}\Leftrightarrow (P): 2x+y-2z-9=0.$$

- Điểm H=(P)∩(d), toạ độ của H là nghiệm của hệ:

  $$\begin{cases}5x-4y+3z+20=0\\3x-4y+z-8=0\\2x+y-2z-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=-7\\z=-11\end{cases}\Rightarrow H(-3, -7, -11)$$

  Suy ra IH=15.

Cách 2. Lấy điểm A(-9, -10, -5)∈(d).

- Chuyển phương trình (d) về dạng tham số, có dạng:

  $$(d):\begin{cases}\text{qua } A(-9,-10,-5)\\\text{vtcp } \vec{n}(2,1,-2)\end{cases}\Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=-9+2t\\y=-10+t\\z=-5-2t\end{cases}, t\in R.$$

- Điểm H∈(d), có toạ độ H(-9+2t, -10+t, -5-2t) ⇒ $\overrightarrow{HI}$ (11-2t, 13-t, 4+2t).
- Vì $\overrightarrow{HI}\perp(d)\Leftrightarrow\overrightarrow{HI}.\vec{a}=0\Leftrightarrow$ 2.(11-2t)+(13-t)-2.(4+2t)=0 ⇔ t=3.
- Vậy, $\overrightarrow{HI}$ (5, 10, 10) suy ra IH=15.

- (S)∩(d)={A, B} với AB=16 khi và chỉ khi:

  $$R^2=IA^2=AH^2+IH^2=\frac{AB^2}{4}+IH^2=289$$

  Khi đó phương trình mặt cầu (S) tâm I(2, 3, -1) bán kính R^2=289 có dạng:

  (S): $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. (ĐHQG-96): Cho điểm I(2, 3, -1) và đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d):\begin{cases}5x-4y+3z+20=0\\3x-4y+z-8=0\end{cases}.$$

a. Xác định vtcp $\vec{a}$ của (d) suy ra phương trình mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với (d).

b. Tính khoảng cách từ I đến (d) từ đó suy ra phương trình mặt cầu (S) có tâm I sao cho (S) cắt (d) tại hai điểm A, B thoả mãn AB=40.

Bài tập 2. Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình là:

$$(d):\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=3t\end{cases},\ t\in R;\ (P): 2x-y-2z+1=0.$$

a. (ĐHBK - 98): Tìm toạ độ các điểm thuộc đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ mỗi điểm đó đến mặt phẳng (P) bằng 1.

b. (ĐHBK - 98): Gọi K là điểm đối xứng của điểm I(2, -1, 3) qua đường thẳng (d). Xác định toạ độ K.

c. Lập phương trình mặt cầu tâm I cắt đường thẳng (d) tại hai điểm A và B sao cho AB=12.

d. Lập phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P).

e. Lập phương trình mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 16π.

CHỦ ĐỀ 6
MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ta biết rằng: mặt cầu (S) ngoại tiếp khối đa diện (D) là mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của (D).

Xét các trường hợp đặc biệt:

1. MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

Giả sử (S) là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật. Khi đó, (S) có:

- Tâm là tâm của hình hộp (trung điểm của đường chéo chính).
- Bán kính bằng nửa độ dài đường chéo chính.

2. MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP

Ta nhắc lại các kết quả sau của hình học không gian:

1. Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của nó có đường tròn ngoại tiếp.

2. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp cách đề tất cả các đỉnh của hình chóp một đoạn bằng R.

3. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là giao của trục đường tròn ngoại tiếp một đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên.

4. Mặt cầu ngoại tiếp tứ dện SABC, ta thường gặp các trường hợp sau:

<u>*Trường hợp 1:*</u> SA=SB=SC.

a. ***Xác định tâm I***
   - Dựng đường cao $SH\perp(ABC)$.
   - Dựng mặt phẳng trung trực (P) của SA.
   - Khi đó $I=(SH)\cap(P)$.

b. ***Tính bán kính R***: ta có $R^2=IA^2=IS^2$.

<u>*Trường hợp 2:*</u> $SA\perp(ABC)$.

a. ***Xác định tâm I***
   - Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
   - Dựng đường thẳng (d) qua K và song song với SA (hoặc $(d)\perp(ABC)$.
   - Dựng mặt phẳng trung trực (P) của SA.
   - Khi đó $I=(d)\cap(P)$.

b. ***Tính bán kính R***: ta có $R^2=IA^2=IS^2$.

<u>*Trường hợp 3:*</u> $\widehat{ASB} = \widehat{ACB}$.

Khi đó hình cầu ngoại tiếp SABC có tâm I là trung điểm AB và bán kính $R=\dfrac{AB}{2}$.

Trường hợp 4: SA và BC có đoạn trung trực chung EF.

- Lập phương trình tham số đường thẳng (EF) theo t.
- Khi đó hình cầu ngoại tiếp SABC có tâm $I \in EF$, ta có:
- Từ điều kiện $IA^2=IC^2=R^2 \Rightarrow$ giá trị tham số t.
- Từ đó ta được toạ độ tâm I và bán kính R.

3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN

Bài toán 1: Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện (D).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1. Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giả sử (S) có phương trình:

$$(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0,$$

với điều kiện $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Bước 2: Từ điều kiện các đỉnh của (D) thuộc (S) ta được hệ (I) theo các ẩn a, b, c, d.

Bước 3: Giải (I), được a, b, c, d.

Từ đó suy ra phương trình của (S).

Cách 2. Dựa vào đặc tính của khối đa diện (D), từ đó áp dụng các kết quả trình bày trong mục 1, 2 ở trên.

Ví dụ 1. Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, biết A(1, 4, 0), B(-4, 0, 0), C(-2, -2, 0) và D(1, 1, 6).

Giải.

Giả sử mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$$

điều kiện $a^2+b^2+c^2-d \geq 0$.

- Điểm A(1, 4, 0) $\in$ (S) $\Leftrightarrow$ 1+16-2a-8b+d=0. (1)
- Điểm B(-4, 0, 0) $\in$ (S) $\Leftrightarrow$ 16+8a+d=0. (2)
- Điểm C(-2, -2, 0) $\in$ (S) $\Leftrightarrow$ 4+4+4a+4b+d=0. (3)
- Điểm D(1, 1, 6) $\in$ (S) $\Leftrightarrow$ 1+1+36-2a-2b-12c+d=0. (4)

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3) và (4), ta được

$$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2},\ c=2,\ d=-12 \text{ (tmđk)}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): x^2+y^2+z^2-x-y-4z-12=0.$$

Ví dụ 2. Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC, biết S(3, 1, -2), A(5, 3, -1), B(2, 3, -4), C(1, 2, 0).

Giải.

Cách 1.

Giả sử mặt cầu (S) có dạng:

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (điều kiện $a^2+b^2+c^2-d \geq 0$).

- Điểm $A\in(S) \Leftrightarrow 35-10a-6b+2c+d=0$. (1)
- Điểm $B\in(S) \Leftrightarrow 29-4a-6b+8c+d=0$. (2)
- Điểm $C\in(S) \Leftrightarrow 5-2a-4b+d=0$. (3)
- Điểm $S\in(S) \Leftrightarrow 14-6a-2b+4c+d=0$. (4)

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3) và (4), ta được

$a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{7}{2}$, $c=-\frac{3}{2}$, $d=14$ (tmđk).

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-5x-7y+3z+14=0$.

Cách 2. Nhận xét rằng: SA=SB=SC=3 và $AB=BC=CA=\sqrt{18} \Rightarrow$ SABC là hình chóp tam giác đều.

- Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta được: $G(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{5}{3})$.
- Ta có (SG) là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, có phương trình:

$$(SG): \begin{cases} \text{qua } S(3,1,-2) \\ \text{vtcp } \vec{a}(-1,5,1) \end{cases} \Leftrightarrow (SG): \begin{cases} x = 3-t \\ y = 1+5t \\ z = -2+t \end{cases}, (t\in R).$$

- Gọi E là trung điểm SA, ta được: $E(4, 2, -\frac{3}{2})$.
- Mặt phẳng trung trực (P) của SA, được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } E(4,2,-\frac{3}{2}) \\ \text{vtpt } \vec{n}(2,2,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 4x+4y+2z-21=0.$$

- Khi đó tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là giao điểm của (SG) và (P). Bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (SG) vào phương trình của (P), ta được:

$$4(3-t)+4(1+5t)+2(-2+t)-21=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow$ Tâm $I(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{3}{2})$ và bán kính $R^2=IA^2=\frac{27}{4}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S): $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{7}{2})^2+(z+\frac{3}{2})^2=\frac{27}{4}$.

Chú ý: Có thể lập luận như sau:

- Điểm $I\in(SG) \Rightarrow I(3-t, 1+5t, -2+t)$.
- Từ điều kiện $IA=IS \Leftrightarrow IA^2=IS^2 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

Cách 3. Nhận xét rằng: SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau.

- Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta SBC \Rightarrow$ K là trung điểm BC, ta được: $K(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -2)$.
- Gọi (d) là đường thẳng qua K và song song với SA, có phương trình:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } K(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{SA}(2,2,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 3/2 + 2t \\ y = 5/2 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}, (t \in R).$$

- Mặt phẳng trung trực (P) của SA, ta có (P): $4x+4y+2z-21=0$.
- Khi đó tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là giao điểm của (d) và (P). Bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào phương trình của (P), ta được:

$$4(\frac{3}{2}+2t)+4(\frac{5}{2}+2t)+2(-2+t)-21=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow$ Tâm $I(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{3}{2})$ và bán kính $R^2=IA^2=\frac{27}{4}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): (x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{7}{2})^2+(z+\frac{3}{2})^2=\frac{27}{4}.$$

Cách 4. Nhận xét rằng: SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và bằng nhau, do đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp chính là mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương sinh bởi SA, SB, SC là $SBDC.AB_1D_1C_1$.

- Gọi K là trung điểm BC, ta được: $K(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -2)$.
- Vì D đối xứng với S qua K, suy ra D(0, 4, -2).
- Khi đó mặt cầu sẽ có:
  - Tâm I là trung điểm AD $\Rightarrow I((\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{3}{2})$.
  - Bán kính $R^2= IA^2=\frac{27}{4}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): (x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{7}{2})^2+(z+\frac{3}{2})^2=\frac{27}{4}.$$

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1. (ĐHBK-96): Cho tứ diện ABCD với A(3,2,6); B(3,-1,0); C(0,-7,3); D(-2,1,-1).

a. CMR tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau.

b. Tính góc giữa đường thẳng (AD) và mặt phẳng (ABC).

c. Thiết lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

BÀI GIẢI

a. CMR tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau. Thật vậy:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$;

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$.

Vậy tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau.

b. Tính góc giữa đường thẳng (AD) và mặt phẳng (ABC).

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (ABC), ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n}\,(-5, 2, -1).$$

Gọi α góc giữa (AD) và (ABC), khi đó sinα được xác định bởi công thức:

$$\sin\alpha = \frac{|-5.(-5) + 2.(-1) - 1.(-7)|}{\sqrt{(-5)^2 + 2^2 + (-1)^2}\sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + (-7)^2}} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

c. Thiết lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Giả sử (S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (đk $a^2+b^2+c^2-d>0$) là mặt cầu ngoại tiếp ABCD.

Từ A, B, C, D ∈ (S), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9 + 4 + 36 - 6a - 4b - 12c + d = 0 \\ 9 + 1 - 6a + 2b + d = 0 \\ 49 + 9 + 14b + 6c + d = 0 \\ 4 + 1 + 1 + 4a - 2b + 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -5/2 \\ c = -3 \\ d = -5 \end{cases}$$

Vậy mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có dạng: $x^2+y^2+z^2+5y+6z-5=0$.

Bài 2. (ĐHSP Vinh - 98): Cho bốn điểm A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c) trong đó a, b, c > 0.

a. CMR ΔABC nhọn.

b. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

c. Tìm toạ độ điểm O_1 đối xứng với O qua mặt phẳng (ABC).

BÀI GIẢI

a. CMR ΔABC nhọn.

Ta có $AB^2=a^2+b^2$; $AC^2=a^2+c^2$; $BC^2=b^2+c^2$;

Xét ΔABC, áp dụng định lý hàm số cosin, ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{2a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}} > 0 \Rightarrow \hat{A} \text{ nhọn.}$$

Tương tự: $\hat{B}, \hat{C}$ nhọn.

Vậy, ΔABC nhọn.

b. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

Giả sử (S): $x^2+y^2+z^2-2Ax-2By-2Cz+D=0$ (điều kiện $a^2+b^2+c^2-d>0$) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC. Từ O, A, B, C ∈ (S), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} D = 0 \\ a^2 - 2Aa + D = 0 \\ b^2 - 2Bb + D = 0 \\ c^2 - 2Cc + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = a/2 \\ B = b/2 \\ C = c/2 \\ D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (S): x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0.$$

Vậy mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC có tâm

$$I\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) \text{ và bán kính } R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

c. Tìm toạ độ điểm O_1 đối xứng với O qua mặt phẳng (ABC).

Gọi $\vec{n}$ là vtpt tuyến của (ABC), ta có:

$$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}(-a,b,0)\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}(-a,0,c)\end{cases} \Leftrightarrow \vec{n}\,(bc, ac, ab).$$

Phương trình (ABC) được xác định bởi:

$$\begin{cases}\text{qua } A(a,0,0)\\ \text{vtpt } \vec{n}(bc,ac,ab)\end{cases} \Leftrightarrow (ABC): bc.x+ac.y+ab.z-abc=0.$$

Gọi (d) là đường thẳng qua O và vuông góc với (ABC), vậy:

$$(d): \begin{cases}\text{qua } O\\ \text{vtcp } \vec{n}(bc,ac,ab)\end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases}x = bc.t\\ y = ac.t\text{ , } t\in R\\ z = ab.t\end{cases}$$

Gọi H là giao điểm của (d) và (ABC). Để xác định toạ độ giao điểm H, ta thay x, y, z của (d) và (ABC), ta được:

$$bc.bc.t+ac.ac.t+ab.ab.t-abc=0 \Leftrightarrow t=\frac{abc}{b^2.c^2+a^2.c^2+a^2.b^2}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{ab^2c^2}{b^2.c^2+a^2.c^2+a^2.b^2}, \frac{a^2bc^2}{b^2.c^2+a^2.c^2+a^2.b^2}, \frac{a^2b^2c}{b^2.c^2+a^2.c^2+a^2.b^2}\right).$$

Điểm O_1 đối xứng của O qua mặt phẳng (ABC), khi đó toạ độ của O_1 được xác định bởi:

$$\begin{cases}x_{O_1} = 2x_H\\ y_{O_1} = 2y_H\\ z_{O_1} = 2z_H\end{cases} \Rightarrow O_1\left(\frac{2ab^2c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}, \frac{2a^2bc^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}, \frac{2a^2b^2c}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}\right)$$

Bài 3. Cho tứ diện ABCD với A(1,-4,3); B(1,0,5); C(0,3,-2); D(6,-1,-1).

a. Lập phương trình đường vuông góc chung của AB và CD, từ đó tính khoảng cách giữa AB và CD.

b. Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

BÀI GIẢI

a. Ta có:

Phương trình cạnh AB được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases}\text{qua } A\\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(0,4,2)\end{cases} \Leftrightarrow (AB): \begin{cases}x = 1\\ y = -4+2t\text{ , } (t, \in R).\\ z = 3+t\end{cases}$$

Phương trình cạnh CD được cho bởi:

$$(CD): \begin{cases}\text{qua } C\\ \text{vtcp } \overrightarrow{CD}(6,-4,0)\end{cases} \Leftrightarrow (CD): \begin{cases}x = -3u\\ y = 3+2u\text{ , } (u\in R).\\ z = -2\end{cases}$$

. Gọi EF là đoạn vuông góc chung của (AB) và (CD) ($E\in(d_1)$; $F\in(d_2)$). Khi đó, toạ độ của A, B theo thứ tự thoả mãn phương trình tham số của (d_1) và (d_2), tức là:

$$E(1, 2t-4, t+3);\ F(-3u, 2u+3, -2) \Rightarrow \overrightarrow{EF}\,(-3u-1, 2u-2t+7, -t-5).$$

Từ điều kiện:

$$\begin{cases} EF \perp AB \\ EF \perp CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ u = -1 \end{cases}.$$

Ta xác định được toạ độ điểm E(1, -2, 4), F(3, 1, -2). Khi đó:

- Phương trình đường vuông góc chung của (AB) và (CD) chính là phương trình (EF), được cho bởi:

$$(EF): \begin{cases} \text{qua } A(1,-2,4) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(2,3,-6) \end{cases} \Leftrightarrow (EF): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 - 6t \end{cases}, t \in R.$$

- Khoảng cách giữa (AB) và (CD) chính là độ dài đoạn EF, được cho bởi:

$$d((d_1), (d_2)) = CD = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-1)^2 + (4+2)^2} = 7.$$

b. Ta có thể có hai cách sau:

Cách 1.

Giả sử mặt cầu (S) có dạng:

(S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (điều kiện $a^2+b^2+c^2-d \geq 0$).

- Điểm $A \in (S) \Leftrightarrow 26-2a+8b-6c+d=0.$ (1)
- Điểm $B \in (S) \Leftrightarrow 26-2a-10c+d=0.$ (2)
- Điểm $C \in (S) \Leftrightarrow 13-6+4c+d=0.$ (3)
- Điểm $D \in (S) \Leftrightarrow 41-12a+2b+4c+d=0.$ (4)

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3) và (4), ta được

$a=4$, $b=\frac{5}{2}$, $c=-5$, $d=-68$ (tmđk).

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-8x-5y+10z-68=0$.

Cách 2.

Nhận xét rằng: AB và CD có đoạn trung trực chung EF. Khi đó hình cầu ngoại tiếp ABCD có tâm $I \in EF \Rightarrow I(1+2t, -2+3t, 4-6t)$.

Vì $R^2=IA^2=IC^2 \Leftrightarrow 38t=57 \Leftrightarrow t=\frac{3}{2}$.

Khi đó: tâm $I(4, \frac{5}{2}, -5)$ và bán kính $R^2=\frac{461}{4}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng: $(x-4)^2+(y-\frac{5}{2})^2+(z+5)^2=\frac{461}{4}$.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. (ĐH Huế-96): Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn Oxyz cho bốn điểm A(1, 0, 1); B(2, 1, 2); C(1, -1, 1); D(4, 5, -5).

a. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

b. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Bài tập 2. Cho 4 điểm O(0, 0, 0); A(6, 3, 0); B(-2, 9, 1); S(0, 5, 8).

a. (ĐHKT 99): CMR SB vuông góc với OA.

b. (ĐHKT 99): CMR hình chiếu của cạnh SB lên mặt phẳng (OAB) vuông góc với cạnh OA. Gọi K là giao điểm của hình chiếu đó với OA. Hãy xác định toạ độ của K.

c. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

d. (ĐHKT 99): Gọi P, Q lần lượt là điểm giữa của các cạnh SO, AB. Tìm toạ độ của điểm M trên SB sao cho PQ và KM cắt nhau.

Bài tập 3. Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn Oxyz cho bốn điểm A(4, 1, 4); B(3, 3, 1); C(1, 5, 5); D(1, 1, 1).

a. (HVKTQS - 98): Tìm hình chiếu vuông góc của D lên (ABC) và tính thể tích tứ diện ABCD.

b. (HVKTQS - 98): Viết phương trình tham số đường thẳng vuông góc chung của AC và BD.

c. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

d. Tính thể tích tứ diện ABCD.

Bài tập 4. Cho 4 điểm A(-1, 3, 2); B(4, 0, -3); C(5, -1, 4) và D(0, 6, 1).

a. (HVNH TPHCM -99): Viết phương trình tham số của đường thẳng BC. Hạ AH⊥BC. Tìm toạ độ của điểm H.

b. (HVNH TPHCM -99): Viết phương trình tổng quát của (BCD). Tìm khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

c. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Bài tập 5. Trong không gian Oxyz, cho hình chóp SABCD, biết toạ độ các đỉnh S(5, 5, 6), A(1, 3, 0), B(-1, 1, 4), C(1, -1, 4) và D(3, 1, 0).

a. Lập phương trình các mặt của hình chóp.

b. Lập phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp.

c. Tính thể tích hình chóp AABCD.

Bài tập 6. (HVKTMM - 97): Cho 4 điểm A(1, 2, 2); B(-1, 2, -1); C(1, 6, -1) và D(-1, 6, 2).

a. CMR tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

b. Xác định toạ độ trong tâm G của tứ diện

c. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp, mặt cầu nội tiếp tứ diện ABCD.

CHỦ ĐỀ 7
MẶT CẦU NỘI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ta biết rằng: mặt cầu (S) nội tiếp khối đa diện (D) là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của (D).

Xét các trường hợp đặc biệt:

1. MẶT CẦU NỘI TIẾP HÌNH LẬP PHƯƠNG

Giả sử (S) là mặt cầu nội tiếp hình lập phương. Khi đó, (S) có:

- Tâm là tâm của hình lập phương (trung điểm của đường chéo chính).
- Bán kính bằng nửa độ dài cạnh hình lập phương.

2. MẶT CẦU NỘI TIẾP HÌNH CHÓP

Ta nhắc lại các kết quả sau của hình học không gian:

1. Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu nội tiếp là trên mặt đáy có một điểm M cách đều tất cả các mặt bên của hình chóp và khi đó tâm I của mặt cầu nằm trên đoạn SM.

2. Tâm mặt cầu nội tiếp cách đều tất cả các mặt của hình chóp một đoạn bằng r và nằm trên mặt phân giác của góc nhị diện tạo bởi hai mặt kề nhau của hình chóp.

3. Nếu một khối đa diện có mặt cầu nội tiếp thì bán kính của nó có thể tính theo công thức:

$$r = \frac{3V}{S_{tp}}$$

trong đó: V là thể tích khối đa diện

S_{tp} là diện tích toàn phần khối đa diện.

Bài toán 1: Lập phương trình mặt cầu nội tiếp hình chóp.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1. Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giả sử (S) có tâm I(a, b, c), bán kính r.

Bước 2: Từ điều kiện tiếp xúc của (S) và các mặt của hình chóp (khoảng cách từ I đến các mặt bằng r) ta được hệ (I) theo các ẩn a, b, c, r.

Bước 3: Giải (I), được a, b, c, r. Từ đó suy ra phương trình của (S).

Cách 2. (Nếu chỉ ra được điểm M thuộc mặt phẳng đáy cách đều tất cả các mặt bên của hình chóp). Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lập phương trình tham số đường thẳng (SM).

Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng phân giác (P) của một góc nhị diện tạo bởi một mặt bên và đáy.

Bước 3: Khi đó I=(P)∩(SM). Bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (SM) vào (P), ta được giá trị tham số t.

⇒ toạ độ I và bán kính r=d(I, (Q)) với (Q) là một mặt bất kỳ của hình chóp.

Cách 3. Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lập phương trình các mặt phẳng phân giác của các góc nhị diện tạo bởi các mặt bên và đáy.

Bước 2: Vì tâm I của mặt cầu (S) cách đều tất cả các mặt của hình chóp, do đó toạ độ của I là nghiệm của hệ phương trình tạo bởi phương trình của các mặt phẳng phân giác trên.

Bước 3: Bán kính r=d(I, (Q)) với (Q) là một mặt bất kỳ của hình chóp.

Ví dụ 1. Trong không gian Oxyz, cho hình chóp SABCD, biết toạ độ các đỉnh S(0, 0, 2), A(4, 2, 0), B(-4, 2, 0), C(-1, -2, 0) và D(1, -2, 0).

a. Lập phương trình các mặt bên của hình chóp.
b. CMR điểm O cách đều tất cả các mặt bên của hình chóp.
c. Lập phương trình mặt cầu nội tiếp hình chóp.

Giải.

a. Ta lần lượt có:

- Phương trình mặt phẳng (SAB) cho bởi:

$$(SAB): \begin{cases} \text{qua } S \\ \text{hai vtcp } \overrightarrow{SA} \ \& \ \overrightarrow{SB} \end{cases} \Leftrightarrow (SAB): \begin{cases} \text{qua } S(0,0,2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1}(0,1,1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (SAB): y+z-2=0.

- Phương trình mặt phẳng (SBC) cho bởi:

$$(SBC): \begin{cases} \text{qua } S \\ \text{hai vtcp } \overrightarrow{SB} \ \& \ \overrightarrow{SC} \end{cases} \Leftrightarrow (SBC): \begin{cases} \text{qua } S(0,0,2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2}(4,3,-5) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (SBC): 4x+3y-5z+10=0.

- Phương trình mặt phẳng (SCD) cho bởi:

$$(SCD): \begin{cases} \text{qua } S \\ \text{hai vtcp } \overrightarrow{SC} \ \& \ \overrightarrow{SD} \end{cases} \Leftrightarrow (SCD): \begin{cases} \text{qua } S(0,0,2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_3}(0,-1,1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (SCD): y-z+2=0.

- Phương trình mặt phẳng (SAD) cho bởi:

$$(SAD): \begin{cases} \text{qua } S \\ \text{hai vtcp } \overrightarrow{SA} \ \& \ \overrightarrow{SD} \end{cases} \Leftrightarrow (SAD): \begin{cases} \text{qua } S(0,0,2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_4}(4,-3,5) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (SAD): 4x-3y+5z-10=0.

b. Gọi d_1, d_2, d_3, d_4 theo thứ tự là khoảng cách từ O tới các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD), (SAD), ta được:

$$d_1=d_2=d_3=d_4=\sqrt{2}.$$

Vậy điểm O cách đều tất cả các mặt bên của hình chóp.

c. Theo b) mặt cầu nội tiếp hình chóp có tâm I nằm trên đoạn SO và mặt phân giác của góc nhị diện (S, AD, B). Ta có:

- Phương trình đường thẳng (SO) cho bởi:

$$(SO):\begin{cases}\text{qua } O\\ \text{vtcp } \overrightarrow{OS}(0,0,2)\end{cases} \Leftrightarrow (SO):\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=t\end{cases}, (t\in R).$$

- Phương trình mặt phẳng (ABD): z=0.
- Gọi (P) là mặt phẳng phân giác của góc nhị diện (S, AD, B). Khi đó, điểm M(x, y)∈(P)

$$\Leftrightarrow \begin{cases}M \,\&\, S \text{ cung phia voi } (ABD)\\ M \,\&\, B \text{ cung phia voi } (SAD)\\ d(M,(ABD)) = d(M,(SAD))\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z.2>0\\ (4x-3y+5z-10)(-16-6-10)>0\\ \dfrac{|z|}{\sqrt{1^2}}=\dfrac{|4x-3y+5z-10|}{\sqrt{4^2+3^2+5^2}}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow 4x-3y+5(1+\sqrt{2})z-10=0.$

Đó chính là phương trình mặt phẳng (P).

- Vì I=(P)∩(SO). Bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (SO) vào (P), ta được: $t=2(\sqrt{2}-1)$.

Khi đó mặt cầu (S) nội tiếp hình chóp có tâm $I(0, 0, 2\sqrt{2}-2)$ và bán kính $r=d(I, (ABD))=2(\sqrt{2}-1)$.

- Vậy mặt cầu (S) có phương trình:

$(S): x^2+y^2+(z-2\sqrt{2}+2)^2=12-8\sqrt{2}$.

Chú ý:

1. Có thể lập luận như sau:
   - Điểm I nằm trong đoạn SO ⇒ I(0, 0, t) & $\overrightarrow{IS}=k\overrightarrow{IO}$ với k<0. (*)
   - Từ điều kiện

$$d(I, (SAB))=d(I, (ABCD) \Leftrightarrow \frac{|t-2|}{\sqrt{2}}=|t| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2(\sqrt{2}-1)\\ t=-2(\sqrt{2}+1)\ (l)\end{array}\right..$$

2. Trong nhiều trường hợp cần tận dụng đầy đủ các tính chất đặc thù của hình chóp.

Ví dụ 2. Lập phương trình mặt cầu nội tiếp hình chóp SABC, biết S(3, 1, -2), A(5, 3, -1), B(2, 3, -4), C(1, 2, 0).

Giải.

Nhận xét rằng: SA=SB=SC=3 và AB=BC=CA=$\sqrt{18}$ ⇒ SABC là hình chóp tam giác đều ⇒ tâm I của mặt cầu nằm trong đoạn SG và thoả mãn:

$$\frac{\overrightarrow{IS}}{\overrightarrow{IG}}=-\frac{SM}{GM}. \quad (*)$$

trong đó: M là trung điểm AB, ta được: $M(\frac{7}{2}, 3, -\frac{5}{2}) \Rightarrow SM=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

G là trọng tâm ΔABC, ta được: $G(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{5}{3}) \to GM=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

- Ta có (SG) có phương trình:

$$(SG): \begin{cases} \text{qua } S(3,1,-2) \\ \text{vtcp } \vec{a}(-1,5,1) \end{cases} \Leftrightarrow (SG): \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 5t \\ z = -2 + t \end{cases}, (t \in R).$$

$\Rightarrow I(3-t, 1+5t, -2+t)$, $\vec{IS}(-t, 5t, t)$ & $\vec{IG}(\frac{1}{3}-t, 5-\frac{5}{3}.t, t-\frac{1}{3})$

Điều kiện (*) trở thành: $t = \frac{1}{3+\sqrt{3}} = \frac{1}{6}(3-\sqrt{3})$.

Ta được:

- Tâm $I(\frac{1}{6}(15+\sqrt{3}), \frac{1}{6}(21-5\sqrt{3}), \frac{1}{6}(\sqrt{3}-3))$.
- Bán kính $r^2 = IG^2 = \frac{1}{18}(78-19\sqrt{3})$.

Vậy mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): [x-\frac{1}{6}(15+\sqrt{3})]^2+[y-\frac{1}{6}(21-5\sqrt{3})]^2+[z-\frac{1}{6}(\sqrt{3}-3)]^2=\frac{1}{18}(78-19\sqrt{3}).$$

Chú ý: Với tứ diện OABC có A, B, C theo thứ tự thuộc các trục toạ độ Ox, Oy, Oz, khi đó:

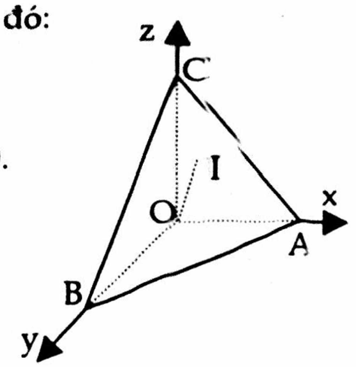
- Tâm I thuộc tia phân giác của góc tam diện $\frac{1}{8}$ không gian toạ độ thứ k ($k=\overline{1,8}$).
- Bán kính r được xác định bởi: $r = |x_I| = d(I, (ABC))$.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1. (ĐH Huế - 2000): Cho ba điểm A(1,0,0); B(0,2,0); C(0,0,3).

a. Viết phương trình tổng quát các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OCA), (ABC).
b. Xác định tâm I của mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC.
c. Tìm toạ độ điểm J đối xứng với I qua mặt phẳng (ABC).

BÀI GIẢI



a. Nhận xét rằng các điểm $A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$, do đó:

(OAB)≡(Oxy), (OBC)≡(Oyz), (OCA)≡(Oxz),

Phương trình mặt phẳng (ABC) được cho bởi:

$$(ABC): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1 \Leftrightarrow (ABC): 6x+3y+2z-6=0.$$

b. Tâm I mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC nằm trên tia phân giác góc tam diện $\frac{1}{8}$ không gian toạ độ thứ nhất, do đó: I(a, a, a), với $0<a<1$.

Mặt khác, ta có:

$$r=a \Leftrightarrow \frac{|6a+3a+2a+6|}{\sqrt{36+9+4}}=a \Leftrightarrow |12a+6|=7a \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}.$$

Vậy, tâm $I(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

c. Gọi (d) là đường thẳng qua I và vuông góc với (ABC), ta có:

$$(d):\begin{cases}\text{qua } I(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})\\ \text{vtcp } \vec{n}(6,3,2)\end{cases} \Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=1/3+6t\\ y=1/3+3t\text{ , }(t\in R).\\ z=1/3+2t\end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (ABC). Ta có $H=(d)\cap(P)$.

Thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào (ABC), ta được:

$$6(\frac{1}{3}+6t)+3(\frac{1}{3}+3t)+2(\frac{1}{3}+2t)-6=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{21}.$$

Thay $t=\frac{1}{21}$ vào phương trình tham số của (d) ta được $H(\frac{13}{21},\frac{10}{21},\frac{9}{21})$.

Gọi $J(x_1, y_1, z_1)$ là điểm đối xứng với I qua mặt phẳng (ABC) $\Rightarrow$ H là trung điểm IJ, ta có:

$$\begin{cases}2x_H = x_I + x_J\\ 2y_H = y_I + y_J\\ 2z_H = z_I + z_J\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_J = 2x_H - x_I\\ y_J = 2y_H - y_I\\ z_J = 2z_H - z_I\end{cases} \Leftrightarrow J(\frac{19}{21},\frac{13}{21},\frac{11}{21}).$$

Bài 2 (ĐHY Hải Phòng - 2000): Cho ba điểm A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c), với $a, b, c>0$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$.

a. CMR khi a, b, c thay đổi mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định. Tìm điểm cố định đó.

b. Xác định tâm I và tính bán kính r của mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC.

c. CMR $\frac{1}{4}<r\le\frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$.

BÀI GIẢI

a. Phương trình mặt phẳng (ABC) được cho bởi:

$$(ABC): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (1)$$

- Tìm điểm cố định mà mặt phẳng (ABC) luôn đi qua

Từ phương trình (1), ta được: $\frac{2x}{a}+\frac{2y}{b}+\frac{2z}{c}=2$

và theo giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$, suy ra điểm $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})\in(ABC)$.

Vậy mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

b. Tâm I mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC nằm trên tia phân giác góc tam diện phần tám không gian toạ độ thứ nhất, do đó: I(p, p, p), với $0<p<\text{Min}\{a, b, c\}$.

Mặt khác, ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2 \Leftrightarrow bc+ca+ab=2abc,$$

$$r=p \Leftrightarrow \frac{|bc.p+ca.p+ab.p-abc|}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}=p \Leftrightarrow \frac{|2abcp-abc|}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}=p$$

$$\Leftrightarrow r=p=\frac{abc}{2abc+\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}. \qquad (2)$$

Vậy, tâm I(p,p,p) và bán kính r=p với p cho bởi (2).

c. Ta có:

$$2abc=bc+ca+ab\le\sqrt{3}\,.\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}\Rightarrow\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}\ge\frac{2abc}{\sqrt{3}}$$

do đó:

$$r=\frac{abc}{2abc+\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}\le\frac{abc}{2abc+\frac{2abc}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}. \quad (3)$$

Mặt khác

$$\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}<bc+ca+ab=2abc$$

do đó:

$$r=\frac{abc}{2abc+\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}>\frac{abc}{2abc+2abc}=\frac{1}{4}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta được $\frac{1}{4}<r\le\frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Lập phương trình mặt cầu nội tiếp hình chóp SABC, biết:

a. $S(\frac{4}{3}, 0, 0)$, A(0, -4, 0); B(0, -4, 0); C(3, 0, 0).

b. S≡O, A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c) với a, b, c>0.

Bài tập 2. Cho hình chóp SABCD. Đỉnh $S(-\frac{1}{2},\frac{9}{2}, 4)$, đáy ABCD là hình vuông có A(-4, 5, 0), đường chéo BD có phương trình:

$$\begin{cases}7x-y+8=0\\z=0\end{cases}$$

a. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chóp.

b. Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

c. Lập phương trình mặt cầu nội tiếp hình chóp.

Bài tập 3. Cho ba điểm A(2, 0, 0); B(0, 2, 0); C(0, 0, 3).

a. Viết phương trình tổng quát các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OCA), (ABC).

b. Xá định tâm I của mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC.

c. Tìm toạ độ điểm J đối xứng với I qua mặt phẳng (ABC).

Bài tập 4. (HVKTMM - 97): Cho 4 điểm A(1, 2, 2); B(-1, 2, -1); C(1, 6, -1), D(-1, 6, 2).

a. CMR tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

b. Xác định toạ độ trong tâm G của tứ diện

c. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

d. Viết phương trình mặt cầu nội tiếp tứ diện ABCD.

CHỦ ĐỀ 8

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐIỂM VÀ MẶT CẦU

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho mặt cầu (S) có phương trình :

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (điều kiện $a^2+b^2+c^2-d\geq 0$).

tâm I a, b, c) và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Giả sử $A(x_0, y_0, z_0)$ là điểm bất kỳ trong không gian. Ta biết rằng phương tích của điểm A đối với mặt cầu (S) là :

$P_{A/(S)} = MI^2 - R^2 = x_0^2+y_0^2+z_0^2+2ax_0+2by_0+2cz_0+d = f(x_0, y_0, z_0)$.

Bài toán 1: Xác định vị trí tương đối của mặt cầu (S) và điểm A cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định $P_{A/(S)}$.

Bước 2: Kết luận:

- Nếu $P_{A/(S)}<0 \Leftrightarrow$ M nằm trong mặt cầu.
- Nếu $P_{A/(S)}=0 \Leftrightarrow$ M nằm trên mặt cầu.
- Nếu $P_{A/(S)}>0 \Leftrightarrow$ M nằm ngoài mặt cầu.

Ví dụ 1: Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0$. Xét vị trí tương đối của điểm A đối với mặt cầu (S) trong các trường hợp sau:

a. Điểm A(1, 1, 0). b. Điểm $A(1, 1, \frac{1}{2})$. c. Điểm A(3, 5, 0).

Giải.

a. Điểm $A(1, 1, 0) \Rightarrow P_{A/(S)}=1+1-2-2+2=0 \Leftrightarrow$ A nằm trên mặt cầu.

b. Điểm $A(1, 1, 2) \Rightarrow P_{A/(S)}=1+1+\frac{1}{4}-2-2-\frac{1}{2}+2<0 \Leftrightarrow$ A nằm trong mặt cầu.

c. Điểm $A(3, 5, 0) \Rightarrow P_{A/(S)}=9+25-6-10+2>0 \Leftrightarrow$ A nằm ngoài mặt cầu.

Bài toán 2: Cho mặt cầu (S) và điểm A không trùng với tâm I của (S). Tìm toạ độ điểm M thuộc (S) sao cho khoảng cách MA đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trước hết:

- Xác định $P_{A/(S)}$, khi đó ta xét hai khả năng sau:

Khả năng 1. Nếu $P_{A/(S)}\neq 0$, thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình tham số đường thẳng (AI).
Bước 2: Xác định toạ độ giao điểm M_1, M_2 của (AI) và (S) $\Rightarrow M_1A$ & M_2A.
Bước 3: Khi đó, với điểm $M\in(S)$ ta có:

- $MA_{Min}=Min\{M_1A, M_2A\}$.
- $MA_{Max}=Max\{M_1A, M_2A\}$.

237

Khả năng 2. Nếu $P_{A/(S)}=0$, khi đó:

- $MA_{Min}=0$, đạt được khi $M\equiv A$.
- $MA_{Max}=2R$, đạt được khi $M\equiv M_1$ là điểm đối xứng với A qua I.

Ví dụ 2: Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-1=0$ sao cho khoảng cách MA đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, biết:

a. A(1, 0, 0).

b. A(1, 1, 0).

Giải.

Xét mặt cầu (S), có tâm O(0, 0, 0) và bán kính R=1.

a. Điểm A(1, 0, 0) $\Rightarrow P_{A/(S)}=0 \Leftrightarrow$ A nằm trên mặt cầu.

Khi đó:

- $MA_{Min}=0$, đạt được khi M≡A.
- $MA_{Max}=2R$, đạt được khi $M\equiv M_1(-1, 0, 0)$ là điểm đối xứng với A qua O.

b. Điểm A(1, 1, 0) $\Rightarrow P_{A/(S)}>0 \Leftrightarrow$ A nằm ngoài mặt cầu.

- Phương trình đường thẳng (AO) cho bởi:

$$(AO):\begin{cases}\text{qua } O(0,0,0)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{OA}(1,1,0)\end{cases} \Leftrightarrow (AO):\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=0\end{cases},(t\in R).$$

- Giả sử $(AO)\cap(S)=\{M_1, M_2\}$. Thay phương trình của (AO) vào phương trình của (S), ta được:

$$t^2+t^2-1=0 \Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}M_1(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)\ \&\ M_1A=\sqrt{2}-1\\ M_2(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)\ \&\ M_2A=\sqrt{2}+1\end{array}\right.$$

Khi đó, với điểm $M\in(S)$ ta có:

- $MA_{Min}=Min\{M_1A, M_2A\}=\sqrt{2}-1$, đạt được khi $M\equiv M_1$.
- $MA_{Max}=Max\{M_1A, M_2A\}=\sqrt{2}+1$, đạt được khi $M\equiv M_2$.

II. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-x-4y-2z-3=0$. Xét vị trí tương đối của điểm A đối với mặt cầu (S) trong các trường hợp sau:

a. Điểm A(1, 3, 2).

b. Điểm A(3, 1,-4).

c. Điểm A(-3, 5, 1).

Bài tập 2. Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0$ sao cho khoảng cách MA đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, biết:

a. A(1, -2, 0).

b. A(1, 1, -2).

CHỦ ĐỀ 9
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT CẦU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho mặt cầu (S) có phương trình :

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (điều kiện $a^2+b^2+c^2-d\geq 0$).

tâm I(a, b, c) và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Bài toán 1: Xác định vị trí tương đối của mặt cầu (S) và đường thẳng (d) cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

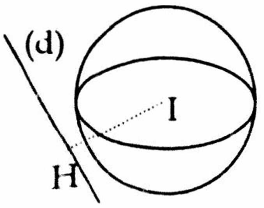
Phương pháp 1. Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).

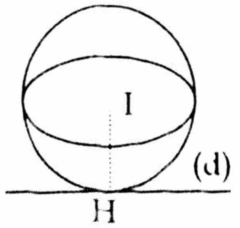
Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (d), xác định toạ độ H $\Rightarrow$ độ dài IH.

Bước 2. So sánh IH với R để đưa ra kết luận:

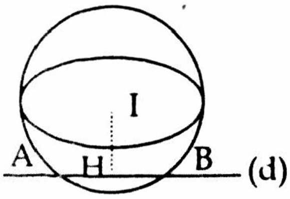
- Nếu IH>R $\Leftrightarrow$ $(d)\cap(S)=\varnothing$ (Hình 1).
- Nếu IH=R $\Leftrightarrow$ (d) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại H (Hình 2).
- Nếu IH<R $\Leftrightarrow$ $(d)\cap(S)=\{A, B\}$ (Hình 3).



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Phương pháp 2. Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số theo t.

Bước 2. Thay x, y, z của (d) vào (S), ta được:

$$At^2+Bt+C=0 \qquad (1)$$

Bước 3: Kết luận:

- Nếu (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ $(d)\cap(S)=\varnothing$.
- Nếu (1) có nghiệm kép t_0 $\Leftrightarrow$ (S) tiếp xúc với (d) tại điểm $H(x(t_0), y(t_0), z(t_0),)$.
- Nếu (1) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 $\Leftrightarrow$ $(d)\cap(S)=\{A, B\}$ với $A(x(t_1), y(t_1), z(t_1),)$ & $B(x(t_2), y(t_2), z(t_2),)$.

Ví dụ 1: Xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt cầu (S) trong các trường hợp:

a. (d): $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$, $(t \in R)$ và (S): $x^2+y^2+z^2-2y-1=0$.

b. (d): $\begin{cases} 4x - 3y + 3 = 0 \\ x - 3z - 9 = 0 \end{cases}$ và (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+5=0$.

Giải:

Cách 1.

- Xét mặt cầu (S), suy ra : tâm I(0, 1, 0) và bán kính $R=\sqrt{2}$.
- Tính khoảng cách từ điểm I đến (d)

Chọn điểm $A(1,0,-1) \in (d)$ và gọi $\vec{a}$ là vtcp của (d), ta có: $\vec{a}$ (-1, 2, 2).

Khi đó khoảng cách từ I đến đường thẳng (d) được xác định bởi

$$kc(I, (d)) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{3} < R \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \{A, B\}.$$

Cách 2.

- Xét hệ phương trình tạo bởi (S) và (d):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1 = 0 \\ x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \Rightarrow 9t^2-10t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 1/9 \end{array}\right..$$

- Với t=1, thay vào phương trình của (d), ta được: A(0, 2, 1).
- Với t=1/9, thay vào phương trình của (d), ta được: B(8/9,2/9, -7/9).

Vậy $(d) \cap (S) = \{A, B\}$.

b. *Cách 1.*

- Xét mặt cầu (S), suy ra: tâm I(1, 2, 1) và bán kính R=1.
- Tính khoảng cách từ điểm I(1, 2, 1) đến đường thẳng (d)

Chọn điểm $A(0,1,-3) \in (d)$ và gọi $\vec{a}$ là vtcp của (d), ta có: $\vec{a}$ (3, 4, 1).

Khi đó khoảng cách từ I đến đường thẳng (d) được xác định bởi

$$kc(I, (d)) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 2-1 & 1+3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1+3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 2-1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2}} = \sqrt{\frac{347}{26}} > R \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \{\varnothing\}$$

Cách 2.

- Xét hệ phương trình tạo bởi (S) và (d)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 5 = 0 \\ 4x - 3y + 3 = 0 \\ x - 3z - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow 26x^2-66x+163=0 \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy $(d) \cap (S) = \{\varnothing\}$.

Bài toán 2 Cho mặt cầu (S) và đường thẳng (d). Tìm toạ độ điểm M thuộc (S) sao cho khoảng cách từ M đến (d) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện như sau:

- Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (d), xác định toạ độ H $\Rightarrow$ IH.

Khi đó ta xét ba khả năng sau:

Khả năng 1. Nếu IH>R, thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình tham số đường thẳng (IH).

Bước 2: Xác định toạ độ giao điểm M_1, M_2 của (IH) và (S) $\Rightarrow$ M_1H, M_2H.

Bước 3: Khi đó, với điểm $M\in(S)$ ta có d(M, (d))=MH và:

- $MH_{Min}=Min\{M_1H, M_2H\}$.
- $MH_{Max}=Max\{M_1H, M_2H\}$.

Khả năng 2. Nếu IH=R, khi đó với điểm $M\in(S)$ ta có d(M, (d))=MH và:

- $MH_{Min}=0$, đạt được khi $M\equiv H$.
- $MH_{Max}=2R$, đạt được khi $M\equiv H_1$ là điểm đối xứng với điểm H qua I.

Khả năng 3. Nếu IH<R, thực hiện theo các bước:

Bước 1: Với điểm $M\in(S)$ ta có $d(M, (d))_{Min}=0$, đạt được khi $M\equiv A$ hoặc $M\equiv B$ với $\{A, B\}=(d)\cap(S)$.

Bước 2: Lập phương trình tham số đường thẳng (IH).

Bước 3: Xác định toạ độ giao điểm M_1, M_2 của (IH) và (S) $\Rightarrow$ M_1H, M_2H.

Bước 4: Khi đó, với điểm $M\in(S)$ ta có: $MH_{Max}=Max\{M_1H, M_2H\}$.

Ví dụ 2. Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z+5=0$. Tìm toạ độ điểm M thuộc (S) sao cho khoảng cách từ M đến (d) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. Biết:

a. (d): $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$, $(t\in R)$.

b. (d): $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

c. (d): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -1/2 \end{cases}$, $(t\in R)$.

Giải.

Mặt cầu (S) có tâm I(1, 2, -1) và bán kính R=1.

a. Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có: $\vec{a}(-1, 1, 0)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (d) $\Rightarrow H\in(d)$ do đó:

H(1-t, t, -1) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{IH}(-t, t-2, 0)$.

Vì $\overrightarrow{IH}\perp\vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\vec{a}=0 \Leftrightarrow -t(-1)+t-2=0 \Leftrightarrow t=1$

suy ra H(0, 1, -1), $\overrightarrow{IH}(-1, -1, 0)$ & IH= $\sqrt{2}$ >1=R.

- Phương trình đường thẳng (IH) được cho bởi:

$$(IH): \begin{cases} \text{qua } H \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IH} \end{cases} \Leftrightarrow (IH): \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t, (t \in R). \\ z = -1 \end{cases}$$

- Giả sử $(IH) \cap (S) = \{M_1, M_2\}$. Bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (IH) vào phương trình của (S), ta được: $t_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

  Suy ra: $M_1(1+\frac{1}{\sqrt{2}}, 2+\frac{1}{\sqrt{2}}, -1) \Rightarrow M_1H = \sqrt{2} + 1$.

  $M_2(1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 2-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1) \Rightarrow M_2H = \sqrt{2} - 1$.

  Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có $d(M, (d)) = MH$ và:
  - $MH_{Min} = Min\{M_1H, M_2H\} = \sqrt{2} - 1$, đạt được khi $M \equiv M_2$.
  - $MH_{Max} = Max\{M_1H, M_2H\} = \sqrt{2} + 1$, đạt được khi $M \equiv M_1$.

b. Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có: $\vec{a}(0, -1, 1)$.
   Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (d).
   Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn :

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (P) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A(1,2,-1) \\ \text{vtpt } \vec{a}(0,-1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): y-z-3=0.$$

   Ta có $H = (d) \cap (P)$, toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ y+z-1=0 \\ y-z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow H(2, 2, -1).$$

suy ra $\overrightarrow{IH}(1, 0, 0)$ & $IH = 1 = R$.

   Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có $d(M, (d)) = MH$ và:
   - $MH_{Min} = 0$, đạt được khi $M \equiv H$.
   - $MH_{Max} = 2$, đạt được khi $M \equiv M_0(0, 2, -1)$ là điểm đối xứng với điểm H qua I.

c. Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có: $\vec{a}(1, -1, 0)$.
   Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (d) $\Rightarrow H \in (d)$ do đó:

$$H(1+t, 2-t, -\frac{1}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{IH}(t, -t, \frac{1}{2}).$$

   Vì $\overrightarrow{IH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow t.1 + (-t).(-1) + \frac{1}{2}.0 = 0 \Leftrightarrow t = 0$

suy ra $H(1, 2, -\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{IH}(0, 0, \frac{1}{2})$ & $IH = \frac{1}{2} < 1 = R$.

- Xác định M để MH_{Min}.

  Giả sử $(d) \cap (S) = \{A, B\}$. Bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (IH) vào phương trình của (S), ta được: $t_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$

$$\Rightarrow A(1+\sqrt{\frac{3}{8}}, 2-\sqrt{\frac{3}{8}}, -\frac{1}{2}) \;\&\; B(1-\sqrt{\frac{3}{8}}, 2+\sqrt{\frac{3}{8}}, -\frac{1}{2}).$$

  Với điểm $M \in (S)$ ta có $d(M, (d))_{Min} = 0$, đạt được khi $M \equiv A$ hoặc $M \equiv B$.

- Xác định M để MH_{Max}.

Phương trình đường thẳng (IH) được cho bởi:

$$(IH): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IH} \end{cases} \Leftrightarrow (IH): \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 + t \end{cases}, (t \in R).$$

Giả sử $(IH) \cap (S) = \{M_1, M_2\}$. Bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (IH) vào phương trình của (S), ta được: $t_{1,2} = \pm 1$.

Suy ra: $M_1(1, 2, 0) \Rightarrow M_1H = \frac{1}{2}$.

$M_2(1, 2, -2) \Rightarrow M_2H = \frac{3}{2}$.

Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có:

$MH_{Max} = Max\{M_1H, M_2H\} = \frac{3}{2}$, đạt được khi $M \equiv M_2$.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1. (ĐHHH-99): Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình : $x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z+13=0$ và đường thẳng (d) đi qua điểm A(2, 1, 0) có vtcp $\vec{a}$ (1, m, -2). Biện luận theo m số giao điểm của mặt cầu (S) và đường thẳng (d).

BÀI GIẢI

Phương trình đường thẳng (d) được xác định bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(2,1,0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(1,m,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}, t \in R.$$

Thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) và phương trình mặt cầu (S), ta được phương trình:

$$(m^2+5)t^2+2(4m+5)t+20=0. \quad (1)$$

Vậy số giao điểm của đường thẳng (d) và mặt cầu (S) là số nghiệm của phương trình (1).

Ta có: $\Delta' = -4m^2+40m-75$.

- Nếu $\Delta' < 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \frac{15}{2} \\ m < \frac{5}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \text{(d) không cắt (S).}$$

- Nếu $\Delta' = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{15}{2} \\ m = \frac{5}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \text{(d) tiếp xúc với (S).}$$

- Nếu $\Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < \frac{15}{2} \Rightarrow \text{(d) cắt (S) tại hai điểm phân biệt.}$$

Bài 2 (ĐHSP Vinh - 99): Cho điểm I(1, 2, -2), đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình:

(d): 2x-2=y+3=z, (P): 2x+2y+z+5=0.

a. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I sao cho mặt phẳng (P) cắt khối cầu theo thiết diện là hình tròn có chu bằng 8π.

b. CMR mặt cầu (S tiếp xúc với đường thẳng (d).

c. Lập phương trình mặt phẳng chứa (d) và tiếp xúc với (S).

BÀI GIẢI

a. Ta có mặt phẳng $(P)\cap(S)=(C)$ có bán kính r, ta có:

$2r.\pi=8\pi \Rightarrow r=4$.

và $R^2=r^2+d^2$,

trong đó:

$$d=d(I, (P))= \frac{|2.1+2.2-2+5|}{\sqrt{4+4+1}}=3;$$

Từ đó, $R^2=5$.

Vậy mặt cầu (S) có phương trình :

(S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$.

b. Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (S) là:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25\\ 2x-2=y+3=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5/3\\ y=-5/3\\ z=4/3\end{cases}$$ là nghiệm duy nhất.

Vậy mặt cậu (S tiếp xúc với đường thẳng (d) tại điểm $M(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và tiếp xúc với (S), khi đó:

$$(Q): \begin{cases}\text{qua } M(\frac{5}{3},-\frac{5}{3},\frac{4}{3})\\ \text{vtpt } \overrightarrow{MI}(\frac{2}{3},-\frac{11}{3},\frac{10}{3})\end{cases} \Leftrightarrow (Q): 6x-33y+30z-105=0.$$

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$. Tìm toạ độ điểm M thuộc (S) sao cho khoảng cách từ M đến (d) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. Biết:

a (d): $\begin{cases}x=2-t\\ y=1+t\\ z=-1-t\end{cases}$, $(t\in R)$.

b (d): $\begin{cases}x+2y+z-3=0\\ y+2z-1=0\end{cases}$.

CHỦ ĐỀ 10

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA MẶT PHẲNG VÀ MẶT CẦU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Xác định vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).

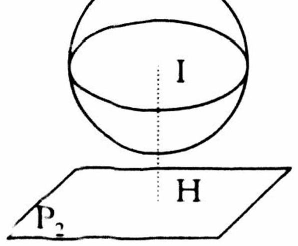
Xác định d=d(I, (P)

Bước 2. So sánh d với R để đưa ra kết luận:

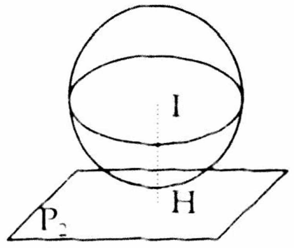
- Nếu d>R $\Leftrightarrow$ $(P)\cap(S)=\varnothing$ (Hình 1).
- Nếu d=R $\Leftrightarrow$ (P) tiếp xúc với (S) tại H (Hình 2).
- Nếu d<R $\Leftrightarrow$ $(P)\cap(S)=(C)$ là một đường tròn nằm trong mặt phẳng (P) có tâm H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và bán kính r= $\sqrt{R^2-IH^2}$ (Hình 3).

Nếu (S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ & (P): $Ax+By+Cz+D=0$, thì phương trình đường tròn (C) có dạng:

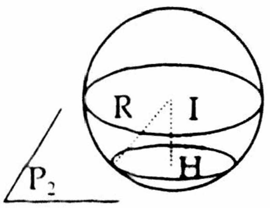
$$(C):\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0\\ Ax+By+Cz+D=0\end{cases}.$$



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Ví dụ 1: Cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình:

(S): $x^2+y^2+z^2-2x-2z-m=0$; (P): $3x+6y-2z-22=0$.

Xét theo m vị trí tương đối của (S) và (P).

Giải.

Xét mặt cầu (S), suy ra: tâm I(1, 0, 1) và bán kính R= $\sqrt{2+m}$.

Khoảng cách từ điểm I(1, 0, 1) đến mặt phẳng (P):

$$d=\frac{|3.1+6.0-2.1-22|}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}}=3.$$

So sánh d, ta xét $d^2-R^2=7-m$.

- Nếu $7-m>0 \Leftrightarrow d^2-R^2>0 \Leftrightarrow d>R \Leftrightarrow (P)\cap(S)=\varnothing$.
- Nếu $7-m=0 \Leftrightarrow d^2-R^2=0 \Leftrightarrow d=R \Leftrightarrow$ (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại H.

- Nếu 7-m<0 ⇔ $d^2-R^2<0$ ⇔ d<R ⇔ (P)∩(S)=(C) là một đường tròn nằm trong mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(C): \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2z-m=0 \\ 3x+6y-2z-22=0 \end{cases}.$$

Ví dụ 2: CMR mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ cắt mặt phẳng (P): x-2=0 theo giao tuyến là một đường tròn (C). Khi đó xác định tâm và tính bán kính của (C).

Giải.

Xét mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$, suy ra: tâm I(1, 0, 0) và bán kính R=2.

Khoảng cách từ điểm I(1, 0, 0) đến mặt phẳng (P):

$$IH=\frac{|1.1-2|}{\sqrt{1^2+0+0}}=1<R$$

⇔ (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C) nằm trong mặt phẳng (P) có phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-3=0 \\ x-2=0 \end{cases}.$$

Khi đó: bán kính đường tròn (C) bằng $\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{3}$.

- Xác định tâm H.

Gọi $\vec{n}$ là vtpt (P), ta có: $\vec{n}$ (1, 0, 0).

Gọi (d) là đường thẳng qua I và vuông góc với (P), vậy:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } I(1,0,0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1,0,0) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}, t\in R.$$

Khi đó H là giao điểm của (d) và (P). Để xác định toạ độ giao điểm H, ta thay x, y, z của (d) và (P), ta được: -1+t=0 ⇔ t=1 ⇒ H(2,0,0).

Vậy: (C) có tâm H(2,0,0) và bán kính bằng $\sqrt{3}$.

Bài toán 2: Cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P). Tìm toạ độ điểm M thuộc (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện như sau:

- Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).
- Xác định d=d(I, (P)).

Khi đó ta xét ba khả năng sau:

Khả năng 1. Nếu d>R, thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình tham số đường thẳng (d) qua I và vuông góc với (P).

Bước 2: Xác định toạ độ giao điểm M_1, M_2 của (d) và (S) ⇒ $d_1=d(M_1, (P))$ & $d_2=d(M_2, (P))$.

Bước 3: Khi đó, với điểm M∈(S) ta có:

- $d(M, (P))_{Min}=Min\{d_1, d_2\}$.
- $d(M, (P))_{Max}=Max\{d_1, d_2\}$.

Khả năng 2. Nếu d=R, thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình tham số đường thẳng (d) qua I và vuông góc với (P).

Bước 2. Xác định toạ độ giao điểm H, H_1 (giả sử H là tiếp điểm) của (d) và (P), khi đó với điểm M∈(S) ta có:

- $d(M, (P))_{Min}=0$, đạt được khi M≡H.
- $d(M, (P))_{Max}=2R$, đạt được khi $M \equiv H_1$ là điểm đối xứng với điểm H qua I.

Lưu ý: cũng có thể áp dụng phương pháp ở khả năng 1.

Khả năng 3. Nếu IH<R, thực hiện theo các bước:

Bước 1: Với điểm M∈(S) ta có $d(M, (P))_{Min}=0$, đạt được khi M∈(C)=(S)∩(P)

Bước 2. Lập phương trình tham số đường thẳng (d) qua I và vuông góc với (P).

Bước 3: Xác định toạ độ giao điểm M_1, M_2 của (d) và (S)

⇒ $d_1=d(M_1, (P))$ & $d_2=d(M_2, (P))$.

Bước 4: Khi đó, với điểm M∈(S) ta có: $d(M, (P))_{Max}=Max\{d_1, d_2\}$.

Ví dụ 3. Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$. Tìm toạ độ điểm M thuộc (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. Biết:

a. (P): x+2y+2z+4=0.

b. (P): 3x-4y-9=0.

c. (P): 2x-2y-z-2=0.

Giải.

Mặt cầu (S) có tâm I(1, 1, 1) và bán kính R=2.

a. Khoảng cách từ I tới (P) được cho bởi:

$$d=\frac{|1+2+2+4|}{\sqrt{1+4+4}}=3>R$$

Gọi (d) là đường thẳng thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } I \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Giả sử $(d)\cap(S)=\{M_1, M_2\}$. Bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào phương trình của (S), ta được: $t_{1,2}=\pm\frac{2}{3}$.

Suy ra: $M_1(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}) \Rightarrow d_1=d(M_1, (P))=5$.

$M_2(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) \Rightarrow d_2=d(M_2, (P))=1$.

Khi đó, với điểm M∈(S) ta có:

- $d(M, (P))_{Min}=Min\{d_1, d_2\}=1$, đạt được khi $M \equiv M_2$.
- $d(M, (P))_{Max}=Max\{d_1, d_2\} =5$, đạt được khi $M \equiv M_1$.

b. Khoảng cách từ I tới (P) được cho bởi:

$$d=\frac{|3-4-9|}{\sqrt{9+16}}=2=R$$

Gọi (d) là đường thẳng thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{qua I} \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 \end{cases}, t \in R.$$

Giả sử $(d) \cap (S) = \{M_1, M_2\}$. Bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào phương trình của (S), ta được: $t_{1,2} = \pm\frac{2}{5}$.

Suy ra: $M_1(\frac{11}{5}, -\frac{3}{5}, 1) \Rightarrow d_1 = d(M_1, (P)) = 1$.

$M_2(-\frac{1}{5}, \frac{13}{5}, 1) \Rightarrow d_2 = d(M_2, (P)) = 0$.

Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có:

- $d(M, (P))_{Min} = Min\{d_1, d_2\} = 0$, đạt được khi $M \equiv M_2$.
- $d(M, (P))_{Max} = Max\{d_1, d_2\} = 2$, đạt được khi $M \equiv M_1$.

c. Khoảng cách từ I tới (P) được cho bởi:

$$d = \frac{|2 - 2 - 1 - 2|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 1 < R$$

- Xác định M để MH_{Min}.

Với điểm $M \in (S)$ ta có $d(M, (P))_{Min} = 0$, đạt được khi $M \in (C) = (S) \cap (P)$, có phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

- Xác định M để MH_{Max}.

Gọi (d) là đường thẳng thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{qua I} \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in R.$$

Giả sử $(d) \cap (S) = \{M_1, M_2\}$. Bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào phương trình của (S), ta được: $t_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$.

Suy ra: $M_1(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \Rightarrow d_1 = d(M_1, (P)) = 1$.

$M_2(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}) \Rightarrow d_2 = d(M_2, (P)) = 3$.

Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có:

$d(M, (P))_{Max} = Max\{d_1, d_2\} = 3$, đạt được khi $M \equiv M_2$.

Bài toán 3: (***Chùm mặt cầu***) Phương trình mặt cầu đi qua giao tuyến của mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ và mặt phẳng (P): $Ax+By+Cz+D=0$ có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d+m(Ax+By+Cz+D)=0$.

Áp dụng:

Ta có thể dùng phương trình chùm mặt cầu dạng trên để giải các bài toán có dạng: "*Viết phương trình mặt cầu qua giao điểm của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) đã cho và thảo mãn một điều kiện nào đó, chẳng hạn đi qua một điểm, tiếp xúc với một mặt phẳng, có tâm thuộc một đường thẳng khác ...*".

Ví dụ 4. Cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình

$$(S): x^2+y^2+z^2-1=0 \text{ và mặt phẳng } (P): x+y+z-1=0$$

Lập phương trình mặt cầu (S_1) qua giao điểm của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) trong các trường hợp:

a. (S_1) đi qua điểm A(2, 1, -1).

b. (S_1) có tâm thuộc mặt phẳng (Q): $x+y+2z+2=0$.

c. (S_1) tiếp xúc mặt phẳng (Q): $x+1=0$.

Giải.

Mặt cầu (S_1) đi qua các giao điểm của (P) với (S), có dạng:

(S_1): $x^2+y^2+z^2-1+m(x+y+z-1)=0$

$\Leftrightarrow$ (S_1): $x^2+y^2+z^2+mx+my+mz-1-m=0$ (1)

suy ra tâm $I(-\frac{m}{2}, -\frac{m}{2}, -\frac{m}{2})$ và bán kính $R=\sqrt{\frac{3m^2}{4}+m+1}$.

a. Điểm $A(2, 1, -1) \in (S) \Leftrightarrow 4+1+1-1+m(2+1-1-1)=0 \Leftrightarrow m=-5$.

Thay m=-5 vào (1) ta được (S_1): $x^2+y^2+y^2-5x-5y-5z+4=0$.

b. Tâm $I \in (Q) \Leftrightarrow -\frac{m}{2}-\frac{m}{2}+2(-\frac{m}{2})+2=0 \Leftrightarrow m=1$.

Thay m=1 vào (1) ta được (S_1): $x^2+y^2+z^2+x+y+z-2=0$.

c. (S_1) tiếp xúc với (Q)

$$\Leftrightarrow d(I, (Q))=R \Leftrightarrow \frac{|-\frac{m}{2}+1|}{\sqrt{1}}=\sqrt{\frac{3m^2}{4}+m+1} \Leftrightarrow 2m^2+8m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-4 \end{array}\right.$$

- Với m=0 vào (1) ta được (S_1): $x^2+y^2+z^2-1=0$.
- Với m=-4 vào (1) ta được (S'_1): $x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z+3=0$.

Vậy, tồn tại hai mặt cầu thoả mãn điều kiện đầu bài.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1. (Đề 100/Va): Gọi T là giao tuyến của mặt cầu (S): $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ với mặt phẳng (P): $2x-2y-z+9=0$. Xác định toạ độ tâm và bán kính của T.

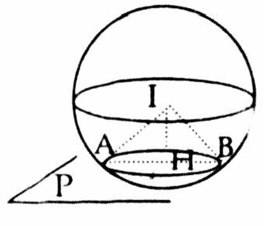
BÀI GIẢI

Xét hình cầu (S) có tâm I(3, -2, 1) và bán kính R=10.

Nhận xét rằng T có:

Tâm H là hình chiếu vuông góc của I lên (P).

Bán kính bằng $AH=\sqrt{AI^2-HI^2}=\sqrt{R^2-HI^2}$.



- Xác định bán kính AH. Ta có:

$$HI=d(I, (P))=\frac{|2.3-2.(-2)-1.1+9|}{\sqrt{4+4+1}}=6<10 \Rightarrow AH=\sqrt{R^2-HI^2}=8.$$

- Xác định tâm H.

Gọi $\vec{n}$ là vtpt (P), ta có: $\vec{n}(2, -2, -1)$.

Gọi (d) là đường thẳng qua I và vuông góc với (P), vậy:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } I(3,-2,1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,-2,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-2t \\ z=1-t \end{cases}, t \in R.$$

Khi đó H là giao điểm của (d) và (P).

Để xác định toạ độ giao điểm H, ta thay x, y, z của (d) và (P), ta được:

$2(3+2t)-2(-2-2t)-(1-t)+9=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow H(-1, 2, 3)$.

Vậy (T) có tâm H(-1, 2, 3) và bán kính bằng 8.

> **Bài 2** (ĐHQG-99): Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn Oxyz cho đường tròn (C) được xác định bởi hệ phương trình:
>
> $$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x+6y+6z+17=0 \ (1) \\ x-2y+2z+1=0 \ (2) \end{cases}.$$
>
> a. Tìm toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn (C).
>
> b. Lập phương trình mặt cầu chứa (C) và có tâm thuộc mặt phẳng (Q): x+y+z+3=0.

BÀI GIẢI

a. Đường tròn (C) chính là giao tuyến của mặt cầu (S) có phương trình (1) (có tâm I(2, -3, -3) và bán kính $R=\sqrt{5}$) và mặt phẳng (P) có phương trình (2). Vậy, đường tròn (C) có:

- Tâm H là hình chiếu vuông góc của I lên (P).
- Bán kính bằng $AH=\sqrt{AI^2-HI^2}=\sqrt{R^2-HI^2}$.

• Xác định bán kính AH.

Ta có: $HI=d(I, (P))=1<\sqrt{5}$.

Từ đó, suy ra $AH=\sqrt{R^2-HI^2}=2$.

• Xác định tâm H.

Gọi $\vec{n}$ là vtpt (P), ta có: $\vec{n}(1, -2, 2)$.

Gọi (d) là đường thẳng qua I và vuông góc với (P), vậy:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } I(2,-3,-3) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1,-2,2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x=2+t \\ y=-3-2t \\ z=-3+2t \end{cases}, t\in R.$$

Khi đó, H là giao điểm của (d) và (P).

Để xác định toạ độ giao điểm H, ta thay x, y, z của (d) và (P), ta được:

$$(2+t)-2(-3-2t)+2(-3+2t)+1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{3} \Rightarrow H(\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{11}{3}).$$

Vậy: (T) có tâm $H(\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{11}{3})$ và bán kính bằng 2.

b. Gọi (S_1) là mặt cầu chứa (C) và có tâm thuộc mặt phẳng (Q).

Mặt cầu (S_1) chứa (C), có dạng :

$x^2+y^2+z^2-4x+6y+6z+17+m(x-2y+2z+1)=0$

$\Leftrightarrow (S_1): x^2+y^2+z^2-(4-m)x-2(m-3)y+2(m+3)z+17+m=0$

Mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(\frac{4-m}{2}, m-3, -m-3)$.

Tâm $I_1\in(Q) \Leftrightarrow \frac{4-m}{2}+m-3-m-3+3=0 \Leftrightarrow m=-2$.

Vậy (S_1) có dạng:

$(S_1): x^2+y^2+z^2-6x+10y+2z+15=0$.

Bài 3 (ĐHTL - 2000): Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2=4$ và mặt phẳng (P): $x+z=2$.

a. CMR mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S). Xác định toạ độ tâm và bán kính của đường tròn (C) là giao tuyến giữa (P) và (S).

b. Viết phương trình (C_1) là hình chiếu vuông góc của (C) trên xOy.

BÀI GIẢI

a. Xét mặt cầu (S), suy ra: tâm I(0, 0, 0) và bán kính R=2.

Khoảng cách từ điểm I(1, 0, 0) đến mặt phẳng (P):

$$IH=\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}<R$$

Vậy (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C) nằm trong mặt phẳng (P) có phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4=0 \\ x+z-2=0 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Khi đó: bán kính đường tròn (C) bằng $\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{2}$.

- Xác định tâm H.

Gọi $\vec{n}$ là vtpt (P), ta có: $\vec{n}$ (1, 0, 1).

Gọi (d) là đường thẳng qua I và vuông góc với (P), vậy:

$$\begin{cases} \text{qua } I(0,0,0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1,0,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}, t\in R.$$

Khi đó H là giao điểm của (d) và (P).

Để xác định toạ độ giao điểm H, ta thay x, y, z của (d) và (P), ta được:

$t+t-2=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(1,0,1)$.

Vậy: (C) có tâm H(1,0,1) và bán kính bằng $\sqrt{2}$.

b. Đường tròn (C_1) là hình chiếu vuông góc của (C) trên mặt phẳng xOy, nên phương trình của nó là một hệ thức giữa x, y.

Để có được hệ thức này ta khử z từ hệ (I), được:

$$x^2+y^2+(x-2)^2=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+\frac{y^2}{2}=1.$$

Bài 4 (ĐHNT - 96): Cho mặt cầu (S): và mặt phẳng (P) có phương trình:

(S): $x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$ & (P): $2x-2y+z+6=0$.

Tìm toạ độ điểm M thuộc (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất.

BÀI GIẢI

Mặt cầu (S) có tâm I(1, 0, -1) và bán kính R=2.

Khoảng cách từ I tới (P) được cho bởi:

$$d=\frac{|2-1+6|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{7}{3}>R.$$

Gọi (d) là đường thẳng thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } I \\ (d)\perp(P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2t \\ z=-1+t \end{cases}, t\in R.$$

Giả sử $(d)\cap(S)=\{M_1, M_2\}$. Bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào phương trình của (S), ta được: $t_{1,2}=\pm\frac{2}{3}$.

Suy ra: $M_1(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}) \Rightarrow d_1=d(M_1, (P))=\frac{13}{3}$.

$M_2(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3}) \Rightarrow d_2=d(M_2, (P))=\frac{1}{3}$.

Khi đó, với điểm $M\in(S)$ ta có:

$d(M, (P))_{Max}=Max\{d_1, d_2\}=\frac{13}{3}$, đạt được khi $M\equiv M_1$.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. (ĐHDL-97): Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn Oxyz cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$(S): x^2+y^2+z^2-2x-2=0$ và $(P): x+z+1=0$.

a. Tính bán kính và toạ độ tâm của mặt cầu (S).
b. Tính bán kính và toạ độ tâm của đường tròn giao của (S) và (P).

Bài tập 2. (ĐHSP Vinh-99) Cho điểm I(1, 2, -2) và mặt phẳng (P): $2x+2y+z+5=0$.

a. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho giao của (S) và (P) là đường tròn có chu vi bằng 8π.
b. CMR mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $2x-2=y+3=z$.
c. Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tiếp xúc với (S).

Bài tập 3. (ĐHBK Khối A - 2000): Cho hình chóp SABC với S(3,1,-2); A(5, 3, -1); B(2, 3, -4); C(1, 2, 0).

a. CMR SABC có đáy ABC là tam giác đều và ba mặt bên là các tam giác vuông cân.
b. Tính toạ độ điểm D đối xứng với điểm C qua đường thẳng AB. M là điểm bất kỳ thuộc mặt cầu tâm D, bán kính $R=\sqrt{18}$. (điểm M không thuộc mặt phẳng (ABC)). Xét tam giác có độ dài các cạnh bằng độ dài các đoạn thẳng MA, MB và MC. Hỏi tam giác đó có đặc điểm gì ?

Bài tập 4. (HVBCVT - 98): Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-22=0 \\ 3x-2y+6z+14=0 \end{cases}.$$

Tìm toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn (C), biết:

Bài tập 5. (ĐHPCCC - 2000): Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=0 \end{cases}.$$

Lập phương trình mặt cầu chứa (C) và tiếp xúc với mặt phẳng (Q): $2x+2y-z-6=0$.

Bài tập 6. (CĐHQ - 96): Cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$(S): (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$, $(P): x+2y+2z+11=0$.

Tìm điểm $M\in(S)$ sao cho khoảng cách từ M tới mặt phẳng (P) nhỏ nhất.

CHỦ ĐỀ 11
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT CẦU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho hai mặt cầu không đồng tâm (S_1) và (S_2) có phương trình :

(S_1): $x^2+y^2+z^2-2a_1x-2b_1y-2c_1z+d_1=0$ $(a_1^2+b_1^2+c_1^2-d_1\geq 0)$

có tâm $I_1(a_1, b_1, c_1)$ và bán kính $R_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2-d_1}$.

(S_2): $x^2+y^2+z^2-2a_2x-2b_2y-2c_2z+d_2=0$ $(a_2^2+b_2^2+c_2^2-d_2\geq 0)$

có tâm $I_2(a_2, b_2, c_2)$ và bán kính $R_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2-d_2}$.

Bài toán 1: Xác định vị trí tương đối của hai mặt cầu (S_1) và (S_2).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để xét vị trí tương đối của hai mặt cầu (C_1) và (C_2) lựa chọn một trong hai phương pháp

Phương pháp 1

Bước 1. Xác định I_1, R_1 và I_2, R_2 từ đó suy ra I_1I_2.

Bước 2. Kết luận:

- Nếu $I_1I_2 > R_1+R_2 \Leftrightarrow (S_1)$ và (S_2) không cắt nhau và ở ngoài nhau.
- Nếu $I_1I_2 < |R_1-R_2| \Leftrightarrow (S_1)$ và (S_2) không cắt nhau và nồng nhau.
- Nếu $I_1I_2 = R_1+R_2 \Leftrightarrow (S_1)$ và (S_2) tiếp xúc ngoài với nhau.
- Nếu $I_1I_2 = |R_1-R_2| \Leftrightarrow (S_1)$ và (S_2) tiếp xúc trong với nhau.
- Nếu $|R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2 \Leftrightarrow (S_1)$ và (S_2) cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn.

Phương pháp này thường được sử dụng để xác định số nghiệm của bài toán tiếp diện chung của hai mặt cầu (S_1) và (S_2).

Phương pháp 2. Xét hệ phương trình tạo bởi (S_1) và (S_2):

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2a_1x-2b_1y-2c_1y+d_1=0 \\ x^2+y^2+z^2-2a_2x-2b_2y-2c_2y+d_2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2a_1x-2b_1y-2c_1y+d_1=0 \\ 2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y+2(c_1-c_2)z+d_2-d_1=0 \quad (1) \end{cases}$$

Để xét vị trí tương đối của hai mặt cầu (S_1) và (S_2) ta xét vị trí tương đối của (S_1) với mặt phẳng (P) có phương trình (1).

Ví dụ 1. Xét vị trí tương đối của hai mặt cầu (S_1) và (S_2) có phương trình:

$$x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-15=0 \text{ và } x^2+y^2+z^2-2x-3=0.$$

Giải.

Cách 1.

Xét mặt cầu (S_1), suy ra : tâm $I_1(-1, 3, -2)$ và bán kính $R_1=\sqrt{29}$.

Xét mặt cầu (S_2), suy ra: tâm $I_2(1, 0, 0)$ và bán kính $R_2=2$.

Ta có $I_1I_2=\sqrt{2^2+3^2+2^2}=\sqrt{17}$, suy ra $|R_1-R_2|=0<I_1I_2<2=R_1+R_2 \Leftrightarrow (S_1)$ và (S_2) cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn.

Cách 2. Xét hệ phương trình tạo bởi (S_1) và (S_2):

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-15=0 \\ x^2+y^2+z^2-2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-3=0 \\ 2x-3y+2z-6=0 \end{cases}.$$

Khi đó, khoảng cách từ $I_2(1, 0, 0)$ tới mặt phẳng (P): $2x-3y+2z-6=0$, được cho bởi:

$$d=\frac{|2.1-6|}{\sqrt{2^2+3^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{17}}<2=R_2$$

$\Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S_2) $\Leftrightarrow$ (S_1) và (S_2) cắt nhau.

Mặt đẳng phương. Cho 2 mặt cầu (S_1), (S_2) không cùng tâm có phương trình

$$(S_1): x^2+y^2+z^2-2a_1x-2b_1y-2c_1z+d_1=0\ (a_1^2+b_1^2+c_1^2-d_1\geq 0)$$

có tâm $I_1(a_1, b_1, c_1)$ và bán kính $R_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2-d_1}$.

$$(S_2): x^2+y^2+z^2-2a_2x-2b_2y-2c_2z+d_2=0\ (a_2^2+b_2^2+c_2^2-d_2\geq 0)$$

có tâm $I_2(a_2, b_2, c_2)$ và bán kính $R_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2-d_2}$.

Khi đó tập hợp những điểm có cùng phương tích với hai mặt cầu (S_1) và (S_2) là mặt phẳng (P), gọi là mặt đẳng phương của hai mặt cầu (S_1), (S_2) có phương trình:

$$2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y+2(c_1-c_2)z-d_1+d_2=0.$$

Ví dụ 2. Tìm mặt đẳng phương của hai mặt cầu

$$(S_1): x^2+y^2+z^2+3x-2z=0 \text{ và } (S_2): x^2+y^2+z^2-2x-2y-z+1=0$$

Giải.

Xét hệ phương trình tạo bởi (S_1) và (S_2), ta có:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+3x-2z=0 \\ x^2+y^2+z^2-2x-2y-z+1=0 \end{cases} \quad (I)$$

Bằng cách khử x^2, y^2 và z^2 từ hệ (I), ta được: $5x+2y-z-1=0$.

Đó chính là phương trình mặt đẳng phương (P) của hai mặt cầu (S_1), (S_2).

Bài toán 2 (***Chùm mặt cầu***) Phương trình mặt cầu đi qua giao điểm của hai mặt cầu:

$$(S_1): x^2+y^2+z^2-2a_1x-2b_1y-2c_1z+d_1=0\ (a_1^2+b_1^2+c_1^2-d_1\geq 0),$$

$$(S_2): x^2+y^2+z^2-2a_2x-2b_2y-2c_2z+d_2=0\ (a_2^2+b_2^2+c_2^2-d_2\geq 0),$$

có dạng:

$$\lambda(x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1)+\mu(x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2) \quad (1)$$

với $\lambda, \mu \in R$ và $\lambda^2+\mu^2>0$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\lambda\neq 0$. Khi đó, phương trình (1) được viết dưới dạng:

$$x^2+y^2+z^2-2a_1x-2b_1y-2c_1z+d_1+\frac{\mu}{\lambda}(x^2+y^2+z^2-2a_2x-2b_2y-2c_2z+d_2)=0$$

đặt $m=\frac{\mu}{\lambda}$, ta được:

$$x^2+y^2+z^2-2a_1x-2b_1y-2c_1z+d_1+m(x^2+y^2+z^2-2a_2x-2b_2y-2c_2z+d_2)=0 \quad (2)$$

Chú ý: khi viết phương trình của một mặt cầu thuộc chùm tạo bởi (S_1) và (S ta sử dụng (1) hoặc (2) (thông thường ta sử dụng (2)).

Áp dụng.

Ta có thể dùng phương trình chùm mặt cầu dạng trên để giải các bài toán có dạng: "*Viết phương trình mặt cầu qua giao điểm của hai mặt cầu (S_1) và (S_2) đã cho và thảo mãn một điều kiện nào đó, chẳng hạn đi qua một điểm, tiếp xúc với một mặt phẳng, đường thẳng, có tâm thuộc một đường thẳng khác...*"

Ví dụ 3 Cho hai mặt cầu (S_1): $x^2+y^2+z^2-2x-4z+1=0$ và (S_2): $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$.

a. CMR hai mặt cầu (S_1) và (S_2) cắt nhau.

b. Viết phương trình mặt cầu qua giao điểm của (S_1) và (S_2) và qua điểm M(3, 0, 0).

Giải.

a. Xét mặt cầu (S_1), suy ra : tâm $I_1(1, 0, 2)$ và bán kính $R_1=2$.

Xét mặt cầu (S_2), suy ra : tâm $I_2(1, 0, 0)$ và bán kính $R_2=2$.

Ta có $I_1I_2=2$, suy ra $|R_1-R_2|=0<I_1I_2<4=R_1+R_2 \Leftrightarrow$ (S_1) cắt (S_2) cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn.

b. Mặt cầu (S) đi qua giao tuyến của hai mặt cầu (S_1) và (S_2), có dạng:

(S): $x^2+y^2+z^2-2x-4z+1+m(x^2+y^2+z^2-2x-3)=0$

$\Leftrightarrow$ (S): $(1+m)x^2+(1+m)y^2+(1+m)z^2-4x-m=0$ (1)

Điểm $M(3, 0, 0)\in(S) \Leftrightarrow (1+m).3^2-4.3-m=0 \Leftrightarrow m=\frac{3}{8}$.

Thay $m=\frac{3}{8}$ vào (1) ta được (S): $11x^2+11y^2+11z^2-32x-3=0$.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1. (ĐHSP Khối B, D - 2000 / HVHCQG - 2000): Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn Oxyz cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' sao cho A trùng với gốc O; B(1, 0, 0); D(0, 1, 0); A'(0, 0, 1). Gọi M là trung điểm AB và N là tâm của hình vuông ADD'A'.

a. Viết phương trình của mặt cầu (S) đi qua các điểm C, D', M, N.

b. Tính bán kính đường tròn giao của (S) với mặt cầu đi qua các điểm A', B, C, D.

c. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (CMN).

BÀI GIẢI

Toạ độ các điểm C, D', M, N là:

C(1, 1, 0); D'(0, 1, 1); $M(\frac{1}{2}, 0, 0)$; $N(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

a. Giả sử mặt cầu đi qua C, D', M, N là

(S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (đk $a^2+b^2+c^2-d>0$),

Từ C, D', M, N $\in$ (S), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2-2a-2b+d=0 \\ 2-2b-2c+d=0 \\ \frac{1}{4}-a+d=0 \\ \frac{1}{2}-b-c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5/4 \\ b=1/4 \\ c=5/4 \\ d=1 \end{cases}$$

Vậy, (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}z+1=0$

b. Mặt cầu đi qua A', B, C', D chính là mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương, có dạng:

$$(S_1): (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4} \Leftrightarrow (S_1): x^2+y^2+z^2-x-y-z=0.$$

Xét hệ phương trình tạo bởi (S) và (S_1):

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}z+1=0 \\ x^2+y^2+z^2-x-y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-x-y-z=0 \\ 3x-y+3z-2=0 \end{cases}.$$

Khi đó, khoảng cách từ $I_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ tới (P): 3x-y+3z-2=0, được cho bởi:

$$d=\frac{|3.\frac{1}{2}-1.\frac{1}{2}+3.\frac{1}{2}-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{1}{2\sqrt{19}}<R_1 \Leftrightarrow (P) \text{ cắt } (S_2)$$

$\Leftrightarrow (S_1)\cap(S)=(C)$ là đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{R_1^2-d^2}=\sqrt{\frac{14}{19}}$

c. Nhận xét rằng: hình chiếu của thiết diện xuống mặt phẳng (ABCD) là hình thang AMCD có diện tích bằng $\frac{3}{4}$.

Vậy, gọi α là góc tạo bởi (CMN) và (ABCD) thì:

$$S_{td}=\frac{S_{AMCD}}{\cos\alpha}=\frac{3}{4\cos\alpha}. \quad (1)$$

Ta có:

- Phương trình (CMN) cho bởi :

$$(CMN): \begin{cases} \text{qua } C(1,1,0) \\ \text{hai vtcp } \overrightarrow{MC}(1/2,1,0)\ \& \\ \overrightarrow{NC}(1,1/2,-1/2) \end{cases} \Leftrightarrow (CMN): \begin{cases} \text{qua } C(1,1,0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(2,-1,3) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (CMN): 2x-y+3z-1=0.

- Côsin của góc α được cho bởi:

$$\cos\alpha=\frac{|2.0-1.0+3.1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\sqrt{1^2}}=\frac{3}{\sqrt{14}}. \quad (2)$$

- Thay (2) vào (1) ta được: $S_{td}=\dfrac{3}{4.\frac{3}{\sqrt{14}}}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hai mặt cầu (S_1): $x^2+y^2+z^2-2x-2y-7=0$ và (S_2): $x^2+y^2+z^2-2x=0$.

a CMR hai mặt cầu (S_1) và (S_2) cắt nhau.

b Viết phương trình mặt cầu qua giao điểm của (S_1) và (S_2) và
Qua điểm M(2, 0, 1).
Tiếp xúc với mặt phẳng (Q): 2x-y-z+2=0.

Bài tập 2. Cho hai mặt cầu (S_1): $x^2+y^2+z^2=9$ và (S_2): $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$.

a CMR hai mặt cầu (S_1) và (S_2) cắt nhau.

b Viết phương trình mặt cầu qua giao điểm của (S_1) và (S_2) và qua điểm M(-2, 1, -1).

CHỦ ĐỀ 12

TIẾP TUYẾN CỦA MẶT CẦU, TIẾP DIỆN CỦA MẶT CẦU

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

1.1. TIẾP TUYẾN CỦA MẶT CẦU

Cho mặt cầu (S) có phương trình :

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cx+d=0$ ($a^2+b^2+c^2-d \ge 0$)

hoặc $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

tâm I(a, b, c) và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Định nghĩa 1. Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của mặt cầu (S) $\Leftrightarrow$ kc(I, (d))=R.

Trong trường hợp biết tiếp điểm A, thì điều kiện là $\vec{a} \perp \overrightarrow{IA}$ (trong đó $\vec{a}$ là một vtcp của (d)).

Ví dụ 1: Cho mặt cầu (S) có phương trình:

(S): $x^2+y^2+z^2-4x-2y-6z+5=0$.

Viết phương trình tiếp tuyến của (S) tại điểm A(0,0,5) và biết rằng tiếp tuyến:

a. Có vtcp $\vec{a}$ (1,2,2).

b. Vuông góc với mặt phẳng (P): 3x-2y+2z+3=0.

Giải.

Mặt cầu (S) có tâm I(2,1,3) và bán kính R=3.

Nhận xét rằng A(0,0,5) $\in$ (S).

a. Đường thẳng (d) có:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(0,0,5) \\ \text{vtcp } \vec{a}(1,2,2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 5 + 2t \end{cases}, (t \in R).$$

Nhận xét rằng:

$\vec{a}.\overrightarrow{IA}=1.(-2)+2.(-1)+2.2=0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \overrightarrow{IA} \Leftrightarrow$ (d) là tiếp tuyến của (S).

b. Đường thẳng (d) có:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{qua } A(0,0,5) \\ \text{vtcp } \vec{a}(3,-2,2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 3t \\ y = -2t \\ z = 5 + 2t \end{cases}, (t \in R).$$

Nhận xét rằng:

$\vec{a}.\overrightarrow{IA}=3.(-2)-2.(-1)+2.2=0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \overrightarrow{IA} \Leftrightarrow$ (d) là tiếp tuyến của (S).

Ví dụ 2: Cho mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0.$$

Viết phương trình tiếp tuyến của (S) đi qua điểm A(-4,3,0) và có vtcp $\vec{a}$ (4,1,1).

Giải.

Mặt cầu (S) có tâm I(1,2,-1) và bán kính R=3.

Đường thẳng (d) có:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(-4,3,0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(4,1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = -4+4t \\ y = 3+t \\ z = t \end{cases}, (t \in R).$$

Nhận xét rằng: kc(I, (d))=3=R ⇔ (d) là tiếp tuyến của (S).

1.2. TIẾP DIỆN CỦA MẶT CẦU

Cho mặt cầu (S) có phương trình :

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cx+d=0$ $(a^2+b^2+c^2-d \geq 0)$

hoặc $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

tâm I(a, b, c) và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Định nghĩa 2. Mặt phẳng (P) là tiếp diện của mặt cầu (S) ⇔ kc(I, (P))=R.

Bài toán: Lập phương trình tiếp diện của mặt cầu thoả mãn điều kiện cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Về phương diện toạ độ, tiếp diện của mặt cầu được xác định bởi hai khả năng:

Khả năng 1: Biết tiếp điểm $M(x_0, y_0, z_0)$, khi đó phương trình tiếp diện:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M_0(x_0, y_0, z_0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{M_0I}(x_0-a, y_0-b, z_0-c) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $(x-x_0)(x_0-a)+(y-y_0)(y_0-b)+(z-z_0)(z_0-c)=0$.

Khả năng 2. Biết một vtpt $\vec{n}$ (A,B,C), khi đó ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: (P) có vtpt $\vec{n}$ (A,B,C) có dạng: Ax+By+Cz+D=0. (1)

Bước 2. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S) ⇔ d(I, (P))=R, (2)

từ (2) xác định được D. Thay vào (1) được phương trình (P).

Chú ý. Các trường hợp khác nên tìm cách đưa về một trong các khả năng trên.

Ví dụ 3. Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$.

Viết phương trình tiếp diện của (S):

a. Đi qua điểm M(1,1,1).

b. Chứa đường thẳng (d): $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ z-1=0 \end{cases}$.

c. Vuông góc với đường thẳng (d): $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}$.

Giải.

Mặt cầu (S) có tâm I(-1,2,3) và bán kính R=3.

a. Nhận xét rằng $M(1,1,1)\in(S)$, vậy phương trình tiếp diện của (S) tại M có dạng:

$$(P):\begin{cases}\text{qua } M(1,1,1)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{MI}(2,-1,-2)\end{cases}\Leftrightarrow (P): 2(x-1)-1(y-1)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow (P): 2x-y-2z+1=0.$$

b. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d) $\Rightarrow$ (P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d). Vậy (P) có dạng:

$$2x-y-1+m(z-1)=0 \Leftrightarrow (P): 2x-y+mz-1-m=0. \quad (1)$$

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow$ kc(I, (P))=R

$$\Leftrightarrow \frac{|2.(-1)-2+m.3-1-m|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+m^2}}=3 \Leftrightarrow m=-2.$$

Thay m=-2 vào (1), ta được (P): 2x-y-2z+1=0.

c. Gọi $\vec{a}$ là vtcp của (d), ta có $\vec{a}(2,1,-2)$.

Mặt phẳng $(P)\perp(d) \Leftrightarrow$ (P) có vtpt là $\vec{a}(2,1,-2)$, có dạng: 2x+y-2z+D=0. (2)

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow$ kc(I, (P))=R

$$\Leftrightarrow \frac{|2.(-1)+2-2.3+D|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}D=-3\\ D=15\end{array}\right..$$

- Với D=-3 vào (2), ta được (P_1): 2x+y-2z-3=0.
- Với D=15 vào (2), ta được (P_2): 2x+y-2z+15=0.

Vậy tồn tại hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (ĐHGT-98): Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu (S) : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và song song với mặt phẳng (P): 4x+3y-12z+1=0.

BÀI GIẢI

Chuyển phương trình (S) về dạng chính tắc, (S) có dạng:

$$(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16.$$

vậy, (S có tâm I(1, 2, 3) và bán kính R=4.

Gọi (Q) mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu (S) và song song với (P), khi đó:

(Q)//(P) $\Rightarrow$ mặt phẳng (Q) có dạng: 4x+3y-12z+d=0 (1)

(Q) tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow$ kc(I, (Q))=R $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}d_1=-26\\ d_2=78\end{array}\right.$.

- Với d_1=-26 thay vào (1), ta có (P_1): 4x+3y-12z-26=0.
- Với d_2=78 thay vào (1), ta có (P_2): 4x+3y-12z+78=0.

Vậy có hai mặt phẳng (P_1), (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 2 (Đề 69 / HVQY - 95): Lập phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với hai đường thẳng (d_1), (d_2), biết

$$(S): x^2+y^2+z^2-10x+2y+26z-113=0,$$

$$(d_1): \frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+13}{2} \text{ và } (d_2): \frac{x+7}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-8}{0}.$$

BÀI GIẢI

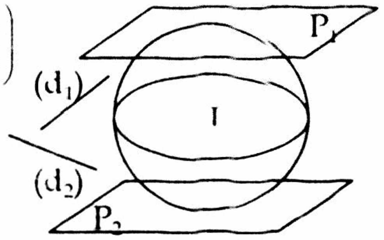
Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1), (d_2), ta có: $\vec{a}_1(2, -3, 2)$, $\vec{a}_2(3, -2, 0)$.

Gọi I, R theo thứ tự là tâm và bán kính mặt cầu (S), ta có:

$I(5, -1, -13)$ và $R=\sqrt{308}$.

Gọi (P) là mặt phẳng có vtpt $\vec{n}$, song song với hai đường thẳng (d_1), (d_2) và tiếp xúc với mặt cầu (S). Ta có:

$$\begin{cases}(P)//(d_1)\\(P)//(d_2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{n}\perp \vec{a}_1\\ \vec{n}\perp \vec{a}_2\end{cases} \Leftrightarrow \vec{n}\left(\begin{vmatrix}-3 & 2\\-2 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 2\\0 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & -3\\3 & -2\end{vmatrix}\right)$$



$\Leftrightarrow \vec{n}(4, 6, 5)$

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

(P): $4x+6y+5z+D=0$

Vì (P) tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow$ kc(I, (P))=R

$$\Leftrightarrow \frac{|4.5+6.(-1)+5.(-13)+D|}{\sqrt{4^2+6^2+5^2}} = \sqrt{308} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}D_1=-103\\D_2=205\end{array}\right.$$

- Với $D_1=-103$, ta có (P_1): $4x+6y+5z-103=0$.
- Với $D_2=205$, ta có (P_2): $4x+6y+5z+205=0$.

Vậy có hai mặt phẳng (P_1), (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 3. (Đề 99/Va - ĐHNT - 99): Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình cho bởi:

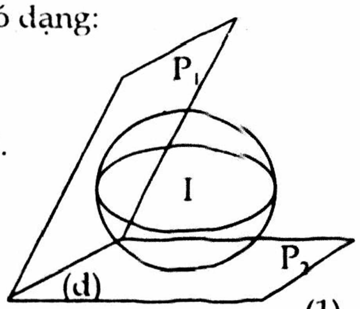
$$(d): \begin{cases}8x-11y+8z-30=0\\x-y-2z=0\end{cases} \quad (S): x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-15=0.$$

BÀI GIẢI

Chuyển phương trình (S) về dạng chính tắc, (S) có dạng:

$(x+1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=29$

vậy, (S) có tâm I(-1, 3, -2) và bán kính $R=\sqrt{29}$.



Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn điều kiện đầu bài.

Vì (P) chứa đường thẳng (d) $\Rightarrow$ (P) thuộc chùm tạo bởi (d), có dạng:

$8x-11y+8z-30+m(x-y-2z)=0$

$\Leftrightarrow$ (P): $(8+m)x-(11+m)y+2(4-m)z-30=0$ (1)

Vì (P) tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow$ kc(I, (P))=R

$$\Leftrightarrow \frac{|(8+m)(-1)-(11+m).3+2(4-m)(-2)-30|}{\sqrt{(8+m)^2+(11+m)^2+4(4-m)^2}} = \sqrt{29} \Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$$

- Với m=1 thay vào (1), ta có

  (P_1): $9x-12y+6z-30=0 \Leftrightarrow (P_1)$: $3x-4y+2z-10=0$.
- Với m=-2 thay vào (1), ta có

  (P_2): $6x-9y+12z-30=0 \Leftrightarrow (P_2)$: $2x-3y+4z-10=0$.

Vậy có hai mặt phẳng (P_1), (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 4 (ĐHMĐC-99): Cho mặt cầu (C), đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$(C): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-67=0$; $(d): \begin{cases} 3x-2y+z-8=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases}$; $(Q): 5x+2y+2z-7=0$.

a. Viết phương trình tất cả các mặt phẳng chứa (d) và tiếp xúc với (C).

b. Hãy viết phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (Q).

BÀI GIẢI

a. Mặt cầu (S) có tâm I(1, 2, 3) và bán kính R=9.

- Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn điều kiện đầu bài.

Vì (P) chứa đường thẳng (d) ⇒ (P) thuộc chùm (d), có dạng:

$(P): 3x-2y+z-8+m(2x-y+3)=0 \Rightarrow (P): (3+2m)x-(2+m)y+z-8+3m=0$ (1)

Vì (P) tiếp xúc với (S) ⇔ d(I, (P))=R ⇔ $m_{1,2}=\frac{-37\pm3\sqrt{3}}{22}$.

- Với $m_1=\frac{-37+3\sqrt{3}}{22}$ thay vào (1) được

$(P_1): (8+6\sqrt{3})x+(7-3\sqrt{3})y-22z+287+9\sqrt{3}=0.$

- Với $m_2=\frac{-37-3\sqrt{3}}{22}$ thay vào (1) được:

$(P_2): (8-6\sqrt{3})x+(7+3\sqrt{3})y-22z+287-9\sqrt{3}=0.$

Vậy có hai mặt phẳng (P_1), (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (P), ta có $\vec{n}$ (5, 2, 2).

Gọi (R) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (Q)

(R) chứa đường thẳng (d) ⇒ (R) thuộc chùm tạo bởi (d), có dạng:

$(R): (3+2m)x-(2+m)y+z-8+3m=0$ (2)

khi đó (R) có một vtpt $\vec{m}$ (3+2m, -2-m, 1).

$(R)\perp(Q) \Leftrightarrow \vec{n}\perp\vec{m} \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{m}=0 \Leftrightarrow m=-\frac{17}{8}$.

Thay $m=-\frac{17}{8}$ vào (2), ta được $(R): 2x+3y-8z+103=0$.

Hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (Q) và (R), có dạng:

$$\begin{cases} 5x+2y+2z-7=0 \\ 2x+3y-8z+103=0 \end{cases}.$$

Bài 5. (HVQY-97): Cho 4 điểm A(1, 0, 2), B(1, 1, 0), C(0, 0, 1), D(1, 1, 1).

a. Tính thể tích tứ diện ABCD.

b. Viết phương trình đường cao DH của tứ diện ABCD.

c. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện tại đỉnh A.

BÀI GIẢI

a. Ta có:

$$V=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\text{(đvt)}.$$

b. Ta có:

$$(DH): \begin{cases} \text{qua } D \\ DH\perp(ABC) \end{cases} \Leftrightarrow (DH): \begin{cases} \text{qua } D \\ \text{vcp } \overrightarrow{DH}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (DH): $\begin{cases} \text{qua } D(1,1,1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{DH}(-1,2,1) \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ (DH): $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t, \ t \in R \\ z = 1 + t \end{cases}$

c. Giả sử mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD có dạng:
(S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, điều kiện $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Từ các điều kiện:

- Điểm $A \in (S) \Leftrightarrow 2a+4c-d=5$. (1)
- Điểm $B \in (S) \Leftrightarrow 2a+2b-d=2$. (2)
- Điểm $C \in (S) \Leftrightarrow 2c-d=1$. (3)
- Điểm $D \in (S) \Leftrightarrow 2a+2b+2c-d=3$. (4)

Giải hệ bởi (1), (2), (3) và (4), ta được $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{2}$, $d=0$ (tmđk).

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng:

(S): $x^2+y^2+z^2-x+y-z=0 \Rightarrow$ tâm $I(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Gọi (P) là mặt phẳng qua A tiếp xúc với (S), ta được:

(P): $\begin{cases} \text{qua } A(1,0,2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AI}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ (P): $x+y+3z-7=0$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+3=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (S) tại điểm A(0,0,3) và biết rằng tiếp tuyến đó:

a. Có vtcp $\vec{a}(1,-2,1)$.

b. Vuông góc với mặt phẳng (P): $x-2y+z-3=0$.

Bài tập 2. Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z-1=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (S) đi qua điểm A(1,1,0) và có vtcp $\vec{a}(4,2,1)$.

Bài tập 3. Viết phương trình tiếp diện của (S): $x^2+y^2+z^2+2x-y-6z+1=0$, biết:

a. Đi qua điểm M(-1,0,0).

b. Chứa đường thẳng (d): $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$.

c. Vuông góc với đường thẳng (d): $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}$.

Bài tập 4. (ĐHXD - 96): Cho mặt cầu (S) và 2 đường thẳng (d_1), (d_2) có:

(S): $x^2+y^2+z^2-2x+2y-9=0$,

(d_1): $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$ và (d_2): $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$.

a Lập phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với hai đường thẳng (d_1), (d_2).

b Lập phương trình chính tắc của đường thẳng qua tâm của (S) đồng thời cắt hai đường thẳng (d_1), (d_2).

Bài tập 5. (CĐKTĐN - 2000): Cho 4 điểm A(1, 0, 2), B(1, 1, 0), C(0, 0, 1), D(1, 1, 1).

a Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

b Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện tại đỉnh A.

PHẦN V

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

CHỦ ĐỀ 1

GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Việc sử dụng phương pháp toạ độ trong không gian giải các bài toán hình học không gian là ý tưởng hoàn toàn mới mẻ và chưa hề được trình bày một cách chi.tiết trong các cuốn tài liệu tham khảo hiện nay. Trong phần này chúng ta cùng nhau xem xét cách thức sử dụng nó để giải một vài dạng toán cơ bản của hình học không gian, tuy nhiên cũng cần phải nhớ rằng không phải khi nào nó cũng tỏ ra hiệu quả.

Bài toán 1: Sử dụng phương pháp toạ độ trong không gian giải các bài toán định lượng trong hình học không gian.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thiết lập hệ trục toạ độ thích hợp, từ đó suy ra toạ độ của các điểm cần thiết.

Bước 2: Thiết lập biểu thức giải tích cho giá trị cần xác định, thông thường bao gồm:

- Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng hoặc mặt phẳng.
- Góc, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.
- Tính độ dài đoạn thẳng.

Chú ý: Với hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ta thường thiết lập hệ trục toạ độ dựa trên ba cạnh AB, AD và AA_1 tương ứng với các trục Ox, .Oy và Oz.

Ví dụ 1: Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a.

a Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và AC_1.

b Gọi K là trung điểm DD_1. Tính góc và khoảng cách giữa 2 đường thẳng CK và A_1D.

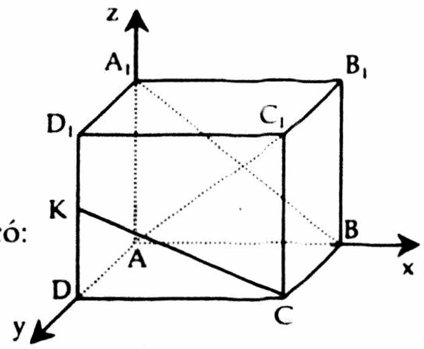
c Mặt phẳng (P) qua BB_1 và hợp với hai đường thẳng BC_1, B_1D hai góc bằng nhau. Tính các góc này.

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B\in Ax$, $D\in Ay$ và $A_1\in Az$, khi đó:

$A(0, 0, 0)$, $B(a, 0, 0)$, $C(a, a, 0)$, $D(0, a, 0)$,

$A_1(0, 0, a)$, $B_1(a, 0, a)$, $C_1(a, a, a)$, $D(0, a, a)$.



a Ta có: $\overrightarrow{A_1B}$ (a, 0, -a) & $\overrightarrow{AC_1}$ (a, a, a).

Gọi α là góc tạo bởi A_1B và AC_1, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{AC_1}|}{|\overrightarrow{A_1B}|.|\overrightarrow{AC_1}|} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Gọi d_1 là khoảng cách giữa A_1B và AC_1, ta có:

$$d_1 = \frac{|[\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{AC_1}].\overrightarrow{AA_1}|}{|[\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{AC_1}]|} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

b Ta có: $K(0, a, \frac{a}{2})$, $\overrightarrow{KC}$ $(a, 0, -\frac{a}{2})$ & $\overrightarrow{A_1D}$ (0, a, -a).

Gọi β là góc tạo bởi CK và A_1D, ta có:

$$\cos\beta = \frac{|\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{A_1D}|}{|\overrightarrow{KC}|.|\overrightarrow{A_1D}|} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Gọi d_2 là khoảng cách giữa CK và A_1D, ta có:

$$d_2 = \frac{|[\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{A_1D}].\overrightarrow{KD}|}{[\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{A_1D}]} = \frac{a}{3}.$$

c Ta có BB_1 là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABB_1A_1) và (BCC_1B_1) nên:

$$(BB_1): \begin{cases} y = 0 \\ x = a \end{cases} \Leftrightarrow (BB_1): \begin{cases} x - a = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Mặt phẳng (P) qua BB_1 có dạng:

(P): x-a+my=0 ⇔ (P): x+my-a=0 ⇒ vtpt $\vec{n}$.(1, m, 0)

Vì (P) hợp với BC_1, B_1D (có vtcp là $\overrightarrow{u_1}$ (0, 1, 1) và $\overrightarrow{u_2}$ (1, -1, 1)) hai góc bằng nhau (giả sử là γ) nên:

$$\sin\gamma = \frac{|m|}{\sqrt{2(m^2+1)}} = \frac{|1-m|}{\sqrt{3(m^2+1)}} \Leftrightarrow \sqrt{3}\ |m| = \sqrt{2}\ |1-m| \Leftrightarrow m^2+4m-2=0$$

$\Leftrightarrow m=-2\pm\sqrt{6}$.

- Với $m=-2+\sqrt{6}$ ta được:

$$\sin\gamma = \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{2[(\sqrt{6}-2)^2+1]}} = \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{22-8\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{(4-\sqrt{6})^2}} = \frac{\sqrt{6}-2}{4-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-1}{5}.$$

- Với $m=-2-\sqrt{6}$ ta được:

$$\sin\gamma = \frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{2[(-\sqrt{6}-2)^2+1]}} = \frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{22+8\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{(4+\sqrt{6})^2}} = \frac{\sqrt{6}+2}{4+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+1}{5}.$$

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCDA_1B_1C_1D_1$, đường cao h. Mặt phẳng (A_1BD) hợp với mặt bên (ABB_1A_1) một góc α. Tính thể tích và diện tích xung quanh hình lăng trụ.

Giải

Giả sử a là cạnh đáy lăng trụ.

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với B∈Ax, D∈Ay và A_1∈Az, khi đó:

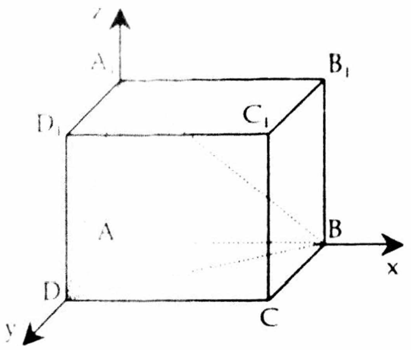
A(0, 0, 0), B(a, 0, 0), C(a, a, 0), D(0, a, 0),

A_1(0, 0, h), B_1(a, 0, h), C_1(a, a, h), D(0, a, h).

Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vtpt của mặt phẳng (ABB_1A_1) và (A_1BD), ta có:

$\overrightarrow{n_1}(0, 1, 0)$.

$\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{A_1B}(a,0,-h) \\ \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{DB}(a,-a,0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2}(h, h, a).$



Ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{h}{\sqrt{2h^2 + a^2}} 0$$

$\Rightarrow a = h\sqrt{tg^2\alpha - 1}$.

Khi đó:

- Thể tích lăng trụ $V = Bh = a^2h = h^3\sqrt{tg^2\alpha - 1}$.
- Diện tích xung quanh lăng trụ $S_{xq} = ph = 4ah = 4h^2\sqrt{tg^2\alpha - 1}$.

Ví dụ 3 Cho hình hộp $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh bằng a, góc $\hat{A} = 60^0$. B_1O vuông góc với đáy ABCD, cho $BB_1 = a$.

a Tính góc giữa cạnh bên và đáy.

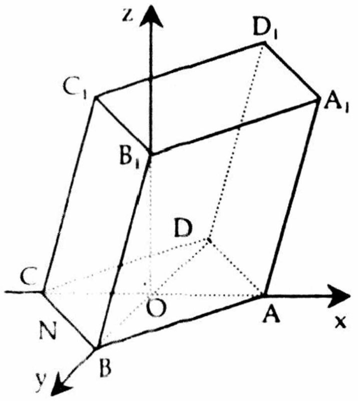
b Tính khoảng cách từ B, B_1 đến mặt phẳng (ACD_1).

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxyz với A, C∈Ax, B, D∈Ay và B_1∈Az, khi đó:

$O(0, 0, 0)$, $A(\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0)$, $B(0, \frac{a}{2}, 0)$,

$C(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0)$, $D(0, -\frac{a}{2}, 0)$.



a Gọi α là góc tạo bởi cạnh bên và đáy, ta có:

$\alpha = \widehat{B_1BO} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{BO}{BB_1} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0$.

$B_1O = BB_1.\sin\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

suy ra $B(0, 0, \frac{a\sqrt{3}}{2})$, $D_1(0, -a, \frac{a\sqrt{3}}{2})$.

b Phương trình mặt phẳng (ACD_1) được cho bởi:

$(ACD_1): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{CA} \ \& \ \overrightarrow{D_1A} \end{cases} \Leftrightarrow (ACD_1): \begin{cases} \text{qua } A(\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1,0,-1) \end{cases}$

$\Rightarrow (ACD_1): 2x - 2y - a\sqrt{3} = 0$.

Khi có khoảng cách từ B, B_1 đến mặt phẳng (ACD_1) được cho bởi:

$$d_B = \frac{|-\frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{2}|}{\sqrt{2}} = \frac{a(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4},$$

$$d_{B_1} = \frac{|-\frac{a\sqrt{3}}{2}|}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Chú ý: Với hình chóp có SA vuông góc với đáy ta thường thiết lập hệ trục toạ độ dựa trên SA ứng với trục Oz.

Ví dụ 4: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy. Tính độ dài đoạn SA biết rằng số đo góc nhị diện (B, SC, D) bằng 120^0.

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B \in Ax$, $D \in Ay$ và $S \in Az$, khi đó:

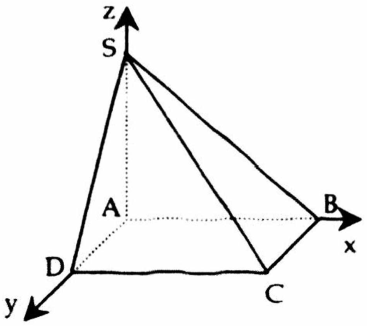
A(0, 0, 0), B(a, 0, 0), C(a, a, 0), D(0, a, 0).

Giả sử $S(0, 0, z_S)$ với $z_S>0$.

Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vtpt của mặt phẳng (SBC) và (SCD), ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{SB}(a,0,-z_S)\\ \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{SC}(a,a,-z_S)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1}(z_S, 0, a).$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{SC}(a,a,-z_S)\\ \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{SD}(0,a,-z_S)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2}(0, -z_S, -a).$$



Theo giả thiết ta có:

$$\cos120^0 = \frac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \frac{-a^2}{a^2+z_S^2} \Leftrightarrow z_S=a.$$

Khi đó SA=a.

Ví dụ 5: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA=$a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy.

a Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

b Tính khoảng cách từ tâm O của hình vuông ABCD đến mặt phẳng (SBC).

c Tính khoảng cách từ trọng tâm của ΔSAB đến mặt phẳng (SAC).

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B \in Ax$, $D \in Ay$ và $S \in Az$, khi đó:

$A(0, 0, 0), B(a, 0, 0), C(a, a, 0), D(0, a, 0), S(0, 0, a\sqrt{3}), O(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$.

a Phương trình (SBC) được cho bởi:

$$(SBC): \begin{cases}\text{qua } B\\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{SB} \ \& \ \overrightarrow{SC}\end{cases} \Leftrightarrow (SBC): \begin{cases}\text{qua } B(a,0,0)\\ \text{vtpt } \vec{n}(\sqrt{3},0,1)\end{cases}$$

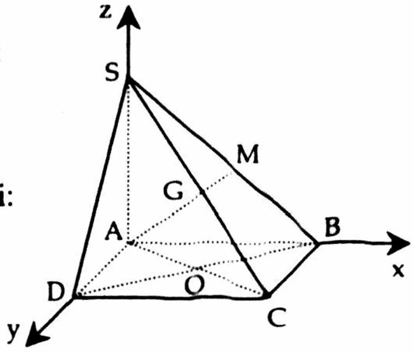
$\Leftrightarrow$ (SBC): $x\sqrt{3} + z - a\sqrt{3} = 0$.

Khoảng cách d_1 từ A đến (SBC) được cho bởi:

$$d_1 = \frac{|-a\sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

b Khoảng cách d_2 từ O đến (SBC) được cho bởi:

$$d_2 = \frac{\left|\frac{a\sqrt{3}}{2} - a\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3+1}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$



c. Gọi M là trung điểm SB và G là trọng tâm của ΔSAB, ta có:

$M(\frac{a}{2}, 0, \frac{a\sqrt{3}}{2})$,

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow G(\frac{a}{3}, 0, \frac{a\sqrt{3}}{3})$.

Phương trình (SAC) được cho bởi:

$$(SAC): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{SA} \ \& \ \overrightarrow{SC} \end{cases} \Leftrightarrow (SAC): \begin{cases} \text{qua } A(0,0,0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1,1,0) \end{cases} \Leftrightarrow (SAC): x+y=0.$$

Khoảng cách d_3 từ G đến mặt phẳng (SAC) được cho bởi:

$$d_3 = \frac{|a/3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Ví dụ 6: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Từ trung điểm H của cạnh AB dựng SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) sao cho nhị diện cạnh AD của hình chóp S.ABCD có số đo bằng 60^0.

a. Tính SH và khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

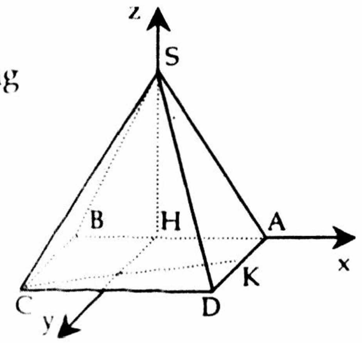
b. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Chứng minh CK⊥SD và tính số đo nhị diện (A, SD, C).

c. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCK).

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Hxyz với A, B∈Hx, S∈Hz, khi đó:

$A(\frac{a}{2}, 0, 0), B(-\frac{a}{2}, 0, 0), C(-\frac{a}{2}, a, 0), D(\frac{a}{2}, a, 0)$.



a. Giả sử $S(0, 0, z_S)$ với $z_S>0$.

Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vtpt của mặt phẳng (ABCD) và (SAD), ta có:

$\overrightarrow{n_1}(0, 0, 1)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{SA}(\frac{a}{2}, 0, -z_S) \\ \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{SD}(\frac{a}{2}, a, -z_S) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2}(-2z_S, 0, a).$$

Theo giả thiết ta có:

$$\cos 60^0 = \frac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{\sqrt{4z_S^2 + a^2}} \Leftrightarrow z_S = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Khi đó $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Phương trình mặt phẳng (SCD) được cho bởi:

$$(SCD): \begin{cases} \text{Qua } S \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{SC} \ \& \ \overrightarrow{SD} \end{cases} \Leftrightarrow (SCD): \begin{cases} \text{Qua } S(0,0,\frac{a\sqrt{3}}{2}) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_3}(0,\sqrt{3},2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (SCD): $y\sqrt{3} + 2z - a\sqrt{3} = 0$.

Khi đó khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) được cho bởi:

$$d = \frac{|-a\sqrt{3}|}{\sqrt{3+4}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

b Vì K là trung điểm AD nên $K(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$, từ đó:

$$\overrightarrow{CK}(a, -\frac{a}{2}, 0) \ \& \ \overrightarrow{SD}(\frac{a}{2}, a, -\frac{a\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{CK}.\overrightarrow{SD} = 0 \Leftrightarrow CK \perp SD.$$

c Gọi $\overrightarrow{n_4}$, $\overrightarrow{n_5}$ theo thứ tự là vtpt của mặt phẳng (SBC) và (SCK), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_4} \perp \overrightarrow{SB}(-\frac{a}{2}, 0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}) \\ \overrightarrow{n_4} \perp \overrightarrow{BC}(0, a, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_4}(-\sqrt{3}, 0, 1).$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_5} \perp \overrightarrow{SC}(-\frac{a}{2}, a, -\frac{a\sqrt{3}}{2}) \\ \overrightarrow{n_5} \perp \overrightarrow{CK}(a, -\frac{a}{2}, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_5}(1, 2, \sqrt{3}).$$

Gọi α là góc tạo bởi (SBC) và (SCK), ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_4}.\overrightarrow{n_5}|}{|\overrightarrow{n_4}|.|\overrightarrow{n_5}|} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90^0.$$

Ví dụ 7: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân với BA=BC=a, SA=a vuông góc với đáy. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm AB và AC.

a Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

b Tính góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC).

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với C∈Ax và S∈Az, khi đó:

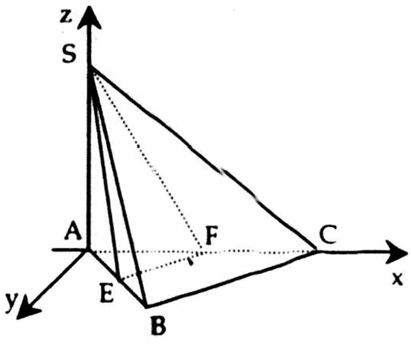
$$A(0, 0, 0), B(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, 0), C(a\sqrt{2}, 0, 0), S(0, 0, a),$$

$$E(\frac{a\sqrt{2}}{4}, \frac{a\sqrt{2}}{4}, 0), F(\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0, 0).$$

a Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vtpt của mặt phẳng (SAC) và (SBC), ta có:

$\overrightarrow{n_1}(0, 1, 0)$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{SC}(\sqrt{2}, 0, -1) \\ \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{BC}(1, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2}(1, 1, \sqrt{2}).$$



Gọi α là góc tạo bởi (SAC) và (SBC), ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

b Gọi $\overrightarrow{n_3}$ là vtpt của mặt phẳng (SEF), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_3} \perp \overrightarrow{EF}(1, -1, 0) \\ \overrightarrow{n_3} \perp \overrightarrow{SF}(\sqrt{2}, 0, -2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_3}(2, 2, \sqrt{2}).$$

Gọi β là góc tạo bởi (SEF) và (SBC), ta có:

$$\cos\beta = \frac{|\overrightarrow{n_3}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_3}|.|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Ví dụ 8: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AB=2a, SA=a$\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy.

a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC).

c. Tính khoảng cách từ A, D đến mặt phẳng (SBC).

d. Tính khoảng cách từ đường thẳng AB đến mặt phẳng (SCD).

Giải

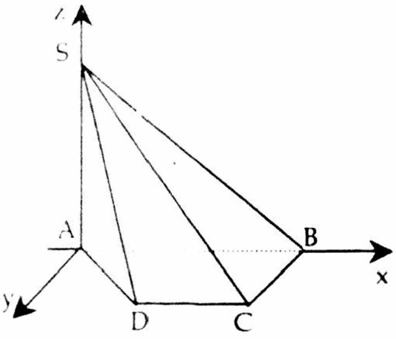
Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B\in Ax$, $S\in Az$, khi đó:

$$A(0, 0, 0),\ B(2a, 0, 0),\ C\left(\frac{3a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right),\ D\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right),\ S(0, 0, a\sqrt{3}).$$

Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{n_3}$ theo thứ tự là vtpt của các mặt phẳng (SAD), (SBC) và (SCD), ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{SA}(0,0,-a\sqrt{3})\\ \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{SD}\left(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},-a\sqrt{3}\right)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_1}(-\sqrt{3}, 1, 0).$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{SB}(2a,0,-a\sqrt{3})\\ \overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{SC}\left(\frac{3a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},-a\sqrt{3}\right)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_2}(\sqrt{3}, 1, 2).$$



$$\begin{cases}\overrightarrow{n_3}\perp\overrightarrow{SC}\left(\frac{3a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},-a\sqrt{3}\right)\\ \overrightarrow{n_3}\perp\overrightarrow{SD}\left(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},-a\sqrt{3}\right)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_3}(0, 2, 1).$$

a. Gọi α là góc tạo bởi (SAD) và (SBC), ta có:

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

b. Gọi β là góc tạo bởi (SCD) và (SBC), ta có:

$$\cos\beta=\frac{|\overrightarrow{n_3}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_3}|.|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{2}{\sqrt{10}}.$$

c. Phương trình mặt phẳng (SBC) được cho bởi:

$$(SBC): \begin{cases}\text{qua } B(2a,0,0)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2}(\sqrt{3},1,2)\end{cases}\Leftrightarrow (SBC): x\sqrt{3}+y+2z-2a\sqrt{3}=0.$$

Khi đó khoảng cách từ A, D đến mặt phẳng (SBC) được cho bởi:

$$d_A=\frac{|-2a\sqrt{3}|}{\sqrt{3+1+4}}=\frac{a\sqrt{6}}{2},$$

$$d_D=\frac{\left|\frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{2}-2.a\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3+1+4}}=\frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

d. Phương trình mặt phẳng (SCD) được cho bởi:

$$(SCD): \begin{cases}\text{qua } D\left(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},0\right)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_3}(0,2,1)\end{cases}\Leftrightarrow (SCD): 2y+z-a\sqrt{3}=0.$$

Khi đó khoảng cách từ đường thẳng AB đến mặt phẳng (SCD) cho bởi:

$$d=d(A, (SCD))\frac{|-a\sqrt{3}|}{\sqrt{4+1}}=\frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Ví dụ 9: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SO vuông góc với đáy. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và (ABCD) bằng 60^0.

a Tính MN và SO

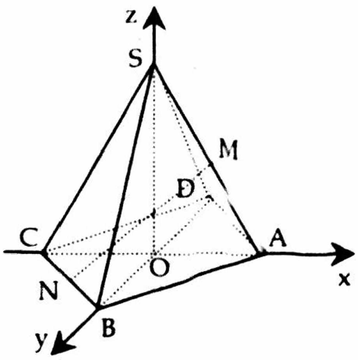
b Tính góc giữa MN và mặt phẳng (SBD).

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxyz với A, C∈Ox, B, D∈Oy và S∈Oz, khi đó:

$$O(0, 0, 0), A(\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0, 0), B(0, \frac{a\sqrt{2}}{2}, 0),$$

$$C(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0, 0), D(0, -\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0),$$



a Giả sử $S(0, 0, z_S)$, khi đó:

$$M(\frac{a\sqrt{2}}{4}, 0, \frac{z_S}{2}), N(-\frac{a\sqrt{2}}{4}, \frac{a\sqrt{2}}{4}, 0)$$

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (ABCD) ⇒ $\vec{n}(0, 0, 1)$

Từ giả thiết ta có:

$$\sin 60^0=\frac{|\overrightarrow{MN}.\vec{n}|}{|\overrightarrow{MN}|.|\vec{n}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{|2z_S|}{\sqrt{8a^2+2a^2+4z_S^2}.1} \Leftrightarrow z_S=\frac{a\sqrt{30}}{2}.$$

Khi đó:

$$SO=|z_S|=\frac{a\sqrt{30}}{2},$$

$$M(\frac{a\sqrt{2}}{4}, 0, \frac{a\sqrt{30}}{4}) \Rightarrow MN=\frac{a\sqrt{10}}{2}$$

b Gọi $\vec{n_1}$ là vtpt của mặt phẳng (SBD), ta có $\vec{n_1}(1, 0, 0)$.

Gọi α là góc tạo bởi MN và (SBD), ta có:

$$\sin\alpha=\frac{|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_1}|}{|\overrightarrow{MN}|.|\overrightarrow{n_1}|}=\frac{|2a\sqrt{2}|}{\sqrt{8a^2+2a^2+30a^2}.1}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Chú ý: Với hình chóp có đáy là hình thoi tâm O ta thường thiết lập hệ trục toạ độ dựa trên AC và BD ứng với trục Ox và Oy.

Ví dụ 10: Cho hình thoi ABCD tâm O, cạnh bằng a và AC=a. Từ trung điểm H của cạnh AB dựng SH⊥(ABCD) với SH=a.

a Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD).

b Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Giải

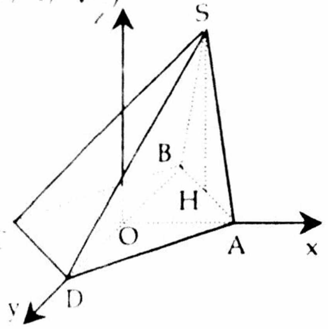
Chọn hệ trục toạ độ Oxyz với A, C∈Ox, B, D∈Oy, khi đó:

$$A(\frac{a}{2}, 0, 0), B(0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0), C(-\frac{a}{2}, 0, 0),$$

$$D(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0), H(\frac{a}{4}, -\frac{a\sqrt{3}}{4}, 0), S(\frac{a}{4}, -\frac{a\sqrt{3}}{4}, a)$$

a. Phương trình (SCD) được cho bởi:

$$(SCD): \begin{cases} \text{qua } C \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{SC} \ \& \ \overrightarrow{SD} \end{cases} \Leftrightarrow (SCD): \begin{cases} \text{qua } C(-\frac{a}{2},0,0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(\sqrt{3},-1,-\sqrt{3}) \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow (SCD): x\sqrt{3} - y - z\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Khoảng cách d_1 từ O đến (SCD) được cho bởi:

$$d_1 = \frac{\left|\frac{a\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{3+1+3}} = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

b. Phương trình (SBC) được cho bởi:

$$(SBC): \begin{cases} \text{qua } C \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{SC} \ \& \ \overrightarrow{SB} \end{cases} \Leftrightarrow (SBC): \begin{cases} \text{qua } C(-\frac{a}{2},0,0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1}(2\sqrt{3},2,-\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (SBC): 2x\sqrt{3} + 2y - z\sqrt{3} + a\sqrt{3} = 0.$$

Khoảng cách d_2 từ A đến mặt phẳng (SBC) được cho bởi:

$$d_2 = \frac{|a\sqrt{3} + a\sqrt{3}|}{\sqrt{12+4+3}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

Ví dụ 11: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABCA_1B_1C_1$ có các cạnh bằng a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC_1) và (BCA_1).

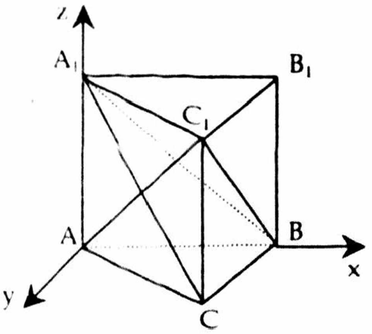
Giải

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B \in Ax$, khi đó:

$$A(0, 0, 0), B(a, 0, 0), C(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0), A_1(0, 0, a), C_1(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, a)$$

Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vtpt của mặt phẳng (ABC_1) và (BCA_1), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{AB}(a,0,0) \\ \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{AC_1}(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},a) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1}(0,-2,\sqrt{3}).$$



$$\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{A_1B}(a,0,-a) \\ \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{BC}(-\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2}(\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}).$$

Gọi α là góc tạo bởi (ABC_1) và (BCA_1), ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{1}{7}.$$

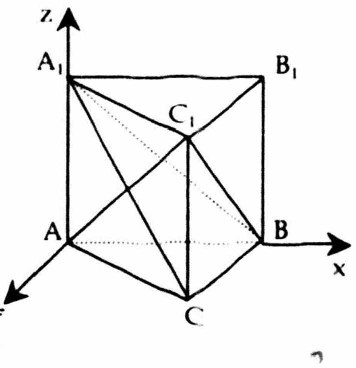
Ví dụ 12: Cho hình lăng trụ $ABCA_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều, $AA_1=h$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết rằng khoảng cách giữa A_1B_1 và BC_1 bằng d. Tính cạnh đáy của lăng trụ theo d và h.

Giải

Giả sử a là cạnh đáy của lăng trụ.

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B \in Ax$, khi đó:

$$A(0, 0, 0), B(a, 0, 0), C(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0), A_1(0, 0, h), B(a, 0, h), C_1(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, h)$$



Gọi $\vec{a}$, $\vec{b}$ theo thứ tự là vtcp của các đường thẳng A_1B_1 và BC_1, ta có:

$\vec{a} // \overrightarrow{A_1B_1}(a, 0, 0) \Rightarrow \vec{a}(1, 0, 0)$,

$\vec{b} // \overrightarrow{BC_1}(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, h) \Rightarrow \vec{b}(a, a\sqrt{3}, -2h)$.

Khi đó:

$$d=\frac{|[\vec{a},\vec{b}].\overrightarrow{BB_1}|}{|[\vec{a},\vec{b}]|}=\frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2+3a^2}} \Leftrightarrow a=\frac{2dh}{\sqrt{3(h^2-d^2)}}$$

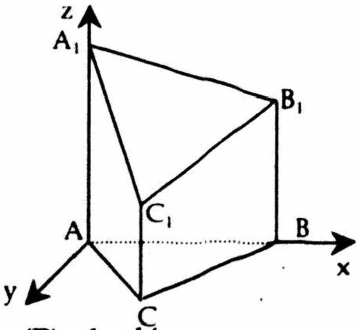
Ví dụ 13: Cho tam giác ABC có AB=3a, đường cao CH=a và AH=a chứa trong mặt phẳng (P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) vẽ từ A, B và C lấy các đoạn $AA_1=3a$, $BB_1=2a$, $CC_1=a$ nằm cùng một bên đối với (P). Tính diện tích $\Delta A_1B_1C_1$.

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B\in Ax$, khi đó:

$A(0, 0, 0)$, $B(3a, 0, 0)$, $C(a, a, 0)$, $A_1(0, 0, 3a)$), $B_1(3a, 0, 2a)$, $C_1(a,a, a)$

Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vtpt của mặt phẳng (P) và $(A_1B_1C_1)$, ta có:



$\overrightarrow{n_1}(0, 0, 1)$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{A_1B_1}(3a,0,-a)\\ \overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{A_1C_1}(a,a,-2a)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2}(1, 5, 3).$$

Gọi α là góc tạo bởi (P) và $(A_1B_1C_1)$, ta có:

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{3}{\sqrt{35}}.$$

Vì ABC là hình chiếu vuông góc của $A_1B_1C_1$ lên (P), do đó:

$$S_{\Delta A_1B_1C_1}=\frac{S_{\Delta ABC}}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{2}CH.AB}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{2}.a.3a}{\frac{3}{\sqrt{35}}}=\frac{a^2\sqrt{35}}{2}.$$

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

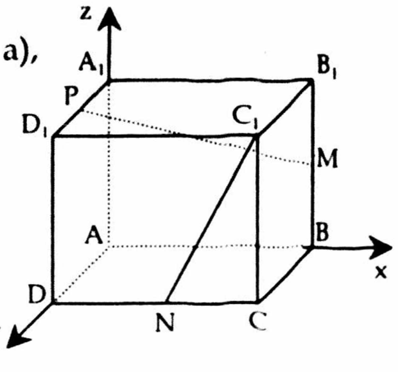
Bài 1 (Đại học Khối B năm 2002): Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a.

a Tính theo a khoảng cách giữa A_1B và B_1D.

b Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh BB_1, CD, A_1D_1. Tính góc giữa MP và C_1N.

BÀI GIẢI

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B\in Ax$, $D\in Ay$ và $A_1\in Az$, khi đó:



$A(0, 0, 0)$, $B(a, 0, 0)$, $C(a, a, 0)$, $D(0, a, 0)$,

$A_1(0, 0, a)$, $B_1(a, 0, a)$, $C_1(a, a, a)$, $D_1(0, a, a)$,

$M(a, 0, \frac{a}{2})$, $N(\frac{a}{2}, a, 0)$, $P(0, \frac{a}{2}, a)$.

a Ta có: $\overrightarrow{A_1B}(a, 0, -a)$ & $\overrightarrow{B_1D}(-a, a, -a)$.

Gọi d là khoảng cách giữa A_1B và B_1D, ta có:

$$d=\frac{|[\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{B_1D}].\overrightarrow{BB_1}|}{|[\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{B_1D}]|}=\frac{a}{\sqrt{6}}.$$

b. Ta có: $\overrightarrow{MP}(-a, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ & $\overrightarrow{C_1N}(-\frac{a}{2}, 0, -a)$.

Gọi α là góc tạo bởi MP và C_1N, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{C_1N}|}{|\overrightarrow{MP}|.|\overrightarrow{C_1N}|} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Bài 2 (ĐHSP TPHCM 92): Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AD, CD. Lấy $P \in BB_1$ sao cho $BP=3PB_1$. Tính diện tích thiết diện do (MNP) cắt hình lập phương.

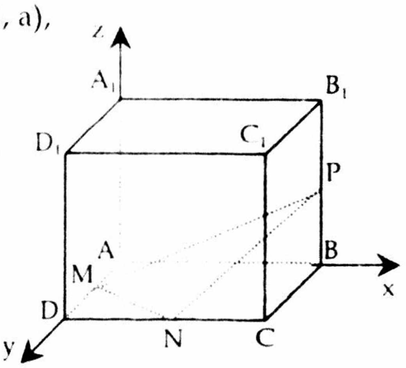
BÀI GIẢI

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B \in Ax$, $D \in Ay$ và $A_1 \in Az$, khi đó:

$A(0, 0, 0)$, $B(a, 0, 0)$, $C(a, a, 0)$, $D(0, a, 0)$,

$A_1(0, 0, a)$, $B_1(a, 0, a)$, $C_1(a, a, a)$, $D_1(0, a, a)$,

$M(0, \frac{a}{2}, 0)$, $N(\frac{a}{2}, a, 0)$, $P(a, 0, \frac{3a}{4})$.



Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vtpt của mặt phẳng (ABCD) và (MNP), ta có:

$\overrightarrow{n_1}(0, 0, 1)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{MP} \\ \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{MN} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2}(-1, 1, 2).$$

Gọi α là góc tạo bởi (MNP) và (ABCD), ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Gọi S_1, S theo thứ tự là diện tích thiết diện và hình chiếu của nó lên mặt phẳng (ABCD), ta được:

$$S_1 = \frac{S}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}.S_{ABCNM} = \frac{1}{\cos\alpha}.(S_{ABCD}-S_{DNM}) = \frac{\sqrt{6}}{2}(a^2 - \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}) = \frac{7a^2\sqrt{6}}{16}.$$

Bài 3 (HVCNBCVT - 2001): Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có AB=a, AD=2a, AA_1=a.

a. Tính theo a khoảng cách giữa AD_1 và B_1C.

b. Gọi M là điểm chia đoạn AD theo tỷ số $\frac{AM}{MD}=3$. Hãy tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (AB_1C).

c. Tính thể tích tứ diện AB_1D_1C.

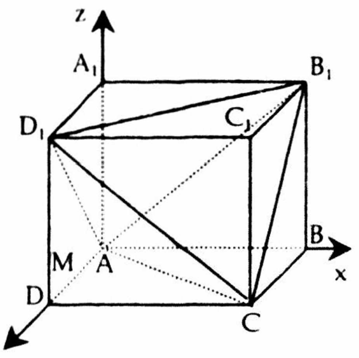
BÀI GIẢI

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B \in Ax$, $D \in Ay$ và $A_1 \in Az$, khi đó:

$A(0, 0, 0)$, $B(a, 0, 0)$, $C(a, 2a, 0)$, $D(0, 2a, 0)$,

$A_1(0, 0, a)$, $B_1(a, 0, a)$, $C_1(2a, a, a)$, $D_1(0, 2a, a)$,

$M(0, \frac{3a}{2}, 0)$.



a. Ta có:

$d(AD_1, B_1C)=d((ADD_1A_1), (BCC_1B_1))=AB=a$.

b Phương trình mặt phẳng (AB_1C) được cho bởi:

$$(AB_1C): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{AC} \ \& \ \overrightarrow{AB_1} \end{cases} \Leftrightarrow (AB_1C): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{vtpt } \vec{n}(2,-1,-2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (AB_1C)$: $2x-y-2z=0$

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (AB_1C) được cho bởi:

$$d=\frac{\left|-\frac{3a}{2}\right|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{a}{2}.$$

c Ta có:

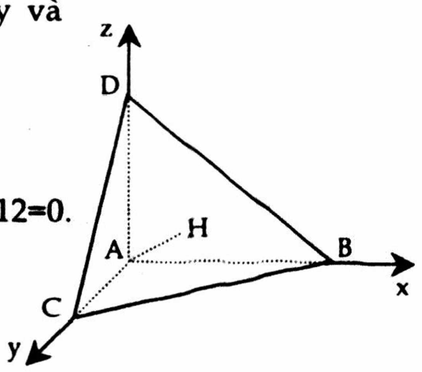
$$V_{AB_1D_1C}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{2a^3}{3}.$$

Bài 4 (Đại học Khối D năm 2002): Cho hình tứ diện ABCD có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), AC=AD=4, AB=3, BC=5. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

BÀI GIẢI

Nhận xét rằng $AB^2+AC^2=BC^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B\in Ax$, $C\in Ay$ và $D\in Az$, khi đó:



A(0, 0, 0), B(3, 0, 0), C(0, 4, 0), D(0, 0, 4)

Phương trình (BCD) được cho bởi:

$$(BCD): \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1 \Leftrightarrow (BCD): 4x+3y+3z-12=0.$$

Khoảng cách từ A đến (BCD) được cho bởi:

$$d=\frac{|-12|}{\sqrt{4^2+3^2+3^2}}=\frac{12}{\sqrt{34}}.$$

Bài 5 (ĐHSP I Khối A - 2000): Trong không gian cho các điểm A, B, C theo thứ tự thuộc các tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một sao cho OA=a, OB=$a\sqrt{2}$, OC=c (a, c>0). Gọi D là đỉnh đối diện với O của hình chữ nhật AOBD và M là trung điểm của đoạn BC. (P) là mặt phẳng đi qua A, M và cắt mặt phẳng (OCD) theo một đường thẳng vuông góc với AM.

a Gọi E là giao điểm của (P) với OC, tính độ dài đoạn OE.

b Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp C.AOBD bởi mặt phẳng (P).

c Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (P).

BÀI GIẢI

Chọn hệ trục toạ độ Oxyz, khi đó:

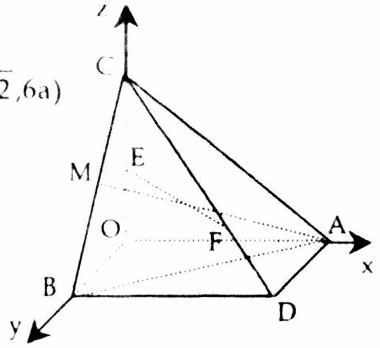
$$O(0, 0, 0), A(a, 0, 0), B(0, a\sqrt{2}, 0), C(0, 0, c), D(a, a\sqrt{2}, 0), M(0, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{c}{2}).$$

a Giả sử $(P)\cap(OCD)=EF\perp AM$. (1)

Nhận xét rằng:

$$\overrightarrow{AM}(-a, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{c}{2}) \ \& \ \overrightarrow{OD}(a, a\sqrt{2}, 0) \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{OD}=0 \Leftrightarrow AM\perp OD. \quad (2)$$

Vì EF, OD đồng phẳng nên từ (1), (2) suy ra EF//OD. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:



$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{AM} \ \& \ \overrightarrow{OD} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A(a,0,0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(2c, -c\sqrt{2}, 6a) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $2cx - cy\sqrt{2} + 6az - 2ac = 0$.

Toạ độ $E(0, 0, \frac{c}{3})$ suy ra $OE = \frac{c}{3}$.

b Ta có:

$$\frac{V_{C.AEMF}}{V_{C.AOBD}} = \frac{V_{C.AEF} + V_{C.MEF}}{V_{C.AOD} + V_{C.BOD}}$$

$$= \frac{V_{C.AEF} + V_{C.MEF}}{2V_{C.AOD}} = \frac{1}{2}\left(\frac{V_{C.AEF}}{V_{C.AOD}} + \frac{V_{C.MEF}}{V_{C.BOD}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{CA.CE.CF}{CA.CO.CD} + \frac{CM.CE.CF}{CB.CO.CD}\right) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Vậy tỉ số thể tích của hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp C.AOBD bởi mặt phẳng (P) bằng $\frac{1}{2}$ (hoặc 2).

c Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$d = \frac{|6ac - 2ac|}{\sqrt{4c^2 + 2c^2 + 36a^2}} = \frac{4ac}{\sqrt{6(6a^2 + c^2)}}.$$

Bài 6 (ĐHBK HN Khối D năm 2001): Trong mặt phẳng (P) cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Trên các tđt vuông góc với (P) tại B và C lần lượt lấy các điểm D, E nằm về cùng một phía đối với (P) sao cho $BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $CE = a\sqrt{3}$.

a Tính độ dài các cạnh AD, AE, DE.

b Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCE.

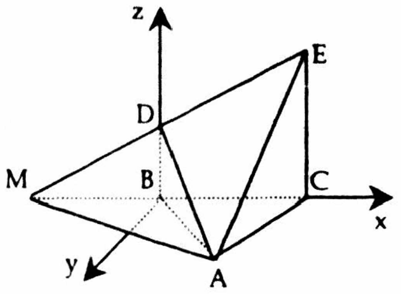
c Gọi M là giao điểm của các đường thẳng ED và BC. CMR đường thẳng AM vuông góc với mặt phẳng (ACE). Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (ADE) và (ABC).

BÀI GIẢI

Chọn hệ trục toạ độ Bxyz với $C \in Bx$, khi đó:

$$A(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0), B(0, 0, 0), C(a, 0, 0), D(0, 0, \frac{a\sqrt{3}}{2}), E(a, 0, \sqrt{3}a)$$

a Ta có:



$$AD^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow AD = \frac{a\sqrt{7}}{2},$$

$$AE^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow AE = 2a,$$

$$DE^2 = a^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow DE = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

b Gọi O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCE, ta được O là giao điểm của đường thẳng (d_H) (là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC và H là trọng tâm ΔABC) với mặt phẳng (P) (là mặt phẳng trung trực cạnh CE), với:

$$(d_H): \begin{cases} \text{qua } H(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}, 0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(0,0,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_O): \begin{cases} x = a/2 \\ y = \frac{a\sqrt{3}}{6}, t \in R. \\ z = t \end{cases}$$

$$(P): \begin{cases} \text{qua } I(\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0) \\ \text{vtpt } \vec{b}(0,0,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): z = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

suy ra toạ độ của $O(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a\sqrt{3}}{2})$ và bán kính

$$R^2 = OE^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{36} + \frac{3a^2}{4} = \frac{39a^2}{36} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{39}}{6}.$$

c Vì $BD \overset{//}{=} \frac{1}{2}CE$ nên $DE \cap BC = M(-a, 0, 0)$

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM}(-\frac{3a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0) \\ \overrightarrow{AC}(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow AM \perp AC \overset{AM \perp CE}{\Rightarrow} AM \perp (ACE).$$

Gọi α là góc tạo bởi (ABC) và (ADE).

Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vtpt của mặt phẳng (ABC) và (ADE), ta có:

$\overrightarrow{n_1}$ (0, 0, 1).

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{AE} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2}(\sqrt{3}, -3, -3).$$

Khi đó:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0.$$

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA=2a và vuông góc với đáy.

a Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC), từ C đến mặt phẳng (SBD).

b M, N lần lượt làtung điểm của AB, AD. CMR MM//(SBD) và tính khoảng cách từ MM đến (SBD).

Bài tập 2. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy. Biết rằng số đo góc nhị diện (B, SC, D) bằng 150^0.

a Tính độ dài đoạn SA.

b Tính số đo của các nhị diện (S, BC, A), (S, BD, A) và (SAB, SCD).

c Tính khoảng cách giữa SC và BD.

d. Tính khoảng cách giữa AC và SD.

Bài tập 3. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB=a, AD=2a, SA=a và vuông góc với đáy.

a. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) và khoảng cách từ trung điểm I của cạnh SC đến mặt phẳng (SBD).

b. Gọi M là trung điểm của CD, tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBM).

Bài tập 4. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a, I là trung điểm của AB. Dựng IS vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và IS=$\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, SD, SB. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của

a. NP và AC.

b. MN và AP.

Bài tập 5. Cho hình thoi ABCD cạnh a, tâm O, OB=$\frac{a\sqrt{3}}{3}$, SO=$\frac{a\sqrt{6}}{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. CMR ASC vuông.

b. CMR (B, SA, D) là nhị diện vuông.

c. Tính số đo (S, BC, A).

Bài tập 6. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với AB=2a, AD=DC=a, SA=a$\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy.

a. Tính số đo của các nhị diện (S, BC, A), (C, SB, A).

b. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Bài tập 7. (ĐHQG TPHCM Khối A - 2000): Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với AB=AD=a, DC=2a, SD=a và vuông góc với đáy.

a. CMR ΔSBC vuông và tính diện tích của tam giác đó.

b. Tính khoảng cách từ A đếm mặt phẳng (SBC).

Bài tập 8. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AB=2a, SA=a$\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy.

a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC).

c. Tính khoảng cách từ A, D đến mặt phẳng (SBC).

d. Tính khoảng cách từ đường thẳng AB đến mặt phẳng (SCD).

e. Tính diện tích thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng α song song với mặt phẳng (SAB) và cách (SAB) một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Bài tập 9. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, SA=a và vuông góc với đáy. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm AB và AC.

a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

b. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SBC).

c. Tính khoảng cách giữa AM và SC.

d. Tính khoảng cách giữa SM và BC.

Bài tập 10. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B với AB=a, SA=a$\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AB. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SM và BC.

Bài tập 11. Cho tam giác cân ABC có đường cao AH=a$\sqrt{3}$, đáy BC=3a, BC chứa trong mặt phẳng (P). Gọi O là hình chiếu của A lên (P). Khi ΔOBC vuông tại O, tính góc giữa mặt phẳng (P) và (ABC).

Bài tập 12. Cho hình lăng trụ $ABCA_1B_1C_1$ có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, A_1C_1, B_1, C_1. Tính khoảng cách giữa:

a A_1B và B_1C.

b A_1B và B_1C_1.

c DE và AB_1.

d DE và A_1F.

Bài tập 13. Cho hình lăng trụ đều $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh đáy a. Góc giữa AC_1 và đáy bằng 60^0. Tính thể tích và diện tích xung quanh hình lăng trụ.

Bài tập 14. Cho hình lăng trụ tứ giác đều. Từ một đỉnh vẽ hai đường chéo của hai mặt bên kề nhau. Góc giữa hai đường chéo ấy bằng α. Tính diện tích xung quanh hình lăng trụ.

Bài tập 15. Cho hình lăng trụ đều $ABCA_1B_1C_1$ cạnh đáy a. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC_1) và (BCC_1B_1) bằng α. Tính thể tích và diện tích xung quanh hình lăng trụ.

Bài tập 16. Trong mặt phẳng α cho ΔABC vuông tại A có BC=2a, $\widehat{ACB}=60^0$. Dựng hai đoạn BB_1=a, CC_1=2a cùng vuông góc với α và ở cùng một phía đối với α. Tính khoảng cách từ:

a A đến mặt phẳng (A_1BC).

b A_1 đến mặt phẳng (ABC_1).

c B_1 đến mặt phẳng (ABC_1).

d C_1 đến mặt phẳng (ABB_1).

e Trung điểm của B_1C đến mặt phẳng (ACC_1).

f Trung điểm của BC đến mặt phẳng (AB_1C_1).

Bài tập 17. Cho tam giác ABC cân tại C có AB=2a, đường cao CH=a chứa trong mặt phẳng (P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) vẽ từ A, B và C lấy các đoạn AA_1=a, BB_1=3a, CC_1=2a nằm cùng một bên đối với (P). Tính diện tích $\Delta A_1B_1C_1$.

Bài tập 18. Trong mặt phẳng α cho đường tròn (C) tâm O, bán kính R. Trên đường thẳng vuông với α tại O lấy điểm S sao cho OS=R. Gọi M, N là hai điểm trên (C), a và b là hai tiếp tuyến với (C) tại M, N. Tính góc giữa hai mặt phẳng (S, a) và (S, b) trong mỗi trường hợp sau:

a M và N là hai điểm xuyên tâm đối.

b $\widehat{MON}=30^0$.

c $\widehat{MON}=60^0$.

d $\widehat{MON}=90^0$.

CHỦ ĐỀ 2

GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Sử dụng phương pháp toạ độ trong không gian giải các bài toán **định tính** trong hình học không gian.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thiết lập hệ trục toạ độ thích hợp, từ đó suy ra toạ độ của các điểm cần thiết.

Bước 2: Thiết lập biểu thức giải tích cho điều kiện, từ đó suy ra kết quả cần chứng minh .

Ví dụ 1: Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a. CMR khoảng cách từ một điểm bất kỳ trong không gian đến một trong các đường thẳng AA_1, B_1C_1, CD không thể đồng thời nhỏ hơn $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

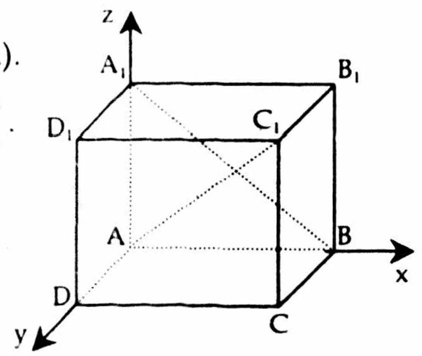
Giải

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B \in Ax$, $D \in Ay$ và $A_1 \in Az$, khi đó:

A(0, 0, 0), B(a, 0, 0), C(a, a, 0), D(0, a, 0),

$A_1(0, 0, a)$, $B_1(a, 0, a)$, $C_1(a, a, a)$, $D_1(0, a, a)$.

(AA_1): $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, (B_1C_1): $\begin{cases} x = a \\ z = a \end{cases}$, (CD): $\begin{cases} y = a \\ z = 0 \end{cases}$.



Với M(x, y, z), ta có:

$d_1^2 = d(M, AA_1) = x^2 + y^2$,

$d_2^2 = d(M, B_1C_1) = (x-a)^2 + (z-a)^2$,

$d_3^2 = d(M, AA_1) = (y-a)^2 + z^2$,

$\Rightarrow d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (z-a)^2 + (y-a)^2 + z^2$

$= x^2 + (x-a)^2 + y^2 + (y-a)^2 + z^2 + (z-a)^2$.

Nhận xét rằng:

$x^2 + (x-a)^2 \geq \frac{a^2}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{a}{2}$

$y^2 + (y-a)^2 \geq \frac{a^2}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $y = \frac{a}{2}$

$z^2 + (z-a)^2 \geq \frac{a^2}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $z = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \geq \frac{3a^2}{2}$

Vậy:

d_1^2, d_2^2, d_3^2 không thể đồng thời nhỏ hơn $\frac{a^2}{2}$

$\Leftrightarrow$ d_1, d_2, d_3 không thể đồng thời nhỏ hơn $\frac{a}{\sqrt{2}}$

dấu dẳng thức xảy ra khi $M(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, tức là đối với tâm hình lập phương.

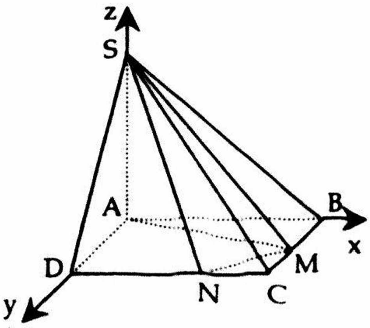
Ví dụ 2: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy. Gọi M, N là hai điểm theo thứ tự thuộc BC, DC sao cho $BM=\frac{a}{2}$, $DN=\frac{3a}{4}$. CMR hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B\in Ax$, $D\in Ay$ và $S\in Az$, khi đó:

$A(0, 0, 0)$, $B(a, 0, 0)$, $C(a, a, 0)$, $D(0, a, 0)$,

$M(a, \frac{a}{2}, 0)$, $N(\frac{3a}{4}, a, 0)$.



Ta có:

$\overrightarrow{AM}(a, \frac{a}{2}, 0)$ & $\overrightarrow{MN}(-\frac{a}{4}, \frac{a}{2}, 0)$

suy ra:

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MN}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow AM\perp MN$.

Mặt khác

$SA\perp MN \Rightarrow (SAM)\perp MN\subset(SMN) \Rightarrow (SAM)\perp(SMN)$.

Ví dụ 3: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng(ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. CMR hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc với nhau.

Giải

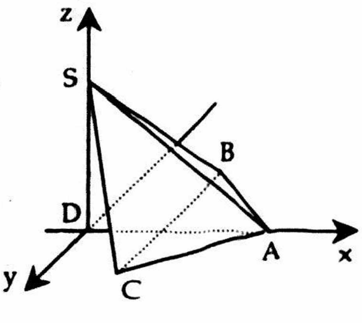
Chọn hệ trục toạ độ Dxyz với $A\in Dx$ và B, C đối xứng qua Dx, khi đó:

$D(0, 0, 0)$, $A(a\sqrt{3}, 0, 0)$, $B(\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}, 0)$, $C(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, 0)$, $S(0, 0, \frac{a\sqrt{6}}{2})$.

Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vtpt của mặt phẳng (SAB) và (SAC), ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{SA}(a\sqrt{3},0,-\frac{a\sqrt{6}}{2})\\ \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{AB}(-\frac{a\sqrt{3}}{2},-\frac{a}{2},0)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{n_1}(1,-\sqrt{3},\sqrt{2}).$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{SA}(a\sqrt{3},0,-\frac{a\sqrt{6}}{2})\\ \overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{AC}(-\frac{a\sqrt{3}}{2},\frac{a}{2},0)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{n_2}(1,\sqrt{3},\sqrt{2}).$$



Nhận xét rằng:

$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=1-3+2=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow (SAB)\perp(SAC)$.

Chú ý Với câu hỏi ngược lại "*Tìm điều kiện để hai đối tượng có quan hệ K với nhau*" ta cũng đi giải tương tự. Cụ thể ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 4: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA=SB=SC, khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng h. Tìm điều kiện của a và h để hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc với nhau.

Giải

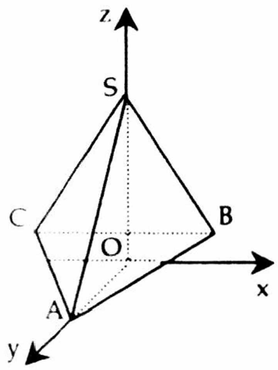
Gọi O là trọng tâm ΔABC, với điều kiện SA=SB=SC ta chọn hệ trục toạ độ Oxyz với BC//Ox, A∈Oy, khi đó:

$$A(0, \frac{a\sqrt{3}}{3}, 0),\ B(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0),\ C(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}, 0),\ S(0, 0, h),$$

Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vtpt của mặt phẳng (SAB) và (SAC), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{SA}(0, \frac{a\sqrt{3}}{3}, -h) \\ \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{AB}(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1}(h\sqrt{3}, h, \frac{a\sqrt{3}}{3}).$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{SA}(0, \frac{a\sqrt{3}}{3}, -h) \\ \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{AC}(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2}(-h\sqrt{3}, h, \frac{a\sqrt{3}}{3}).$$



Để (SAB)⊥(SAC) điều kiện là:

$$\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow -3h^2 + h^2 + \frac{a^2}{3} = 0 \Leftrightarrow a = h\sqrt{6}.$$

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$ có đáy ABC vuông cân tại đỉnh A, BC=2a. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (AB_1C) và (BB_1C) có số đo bằng α. CMR:

$$AA_1 = \frac{2a.\cos\alpha}{\sqrt{\cos(\pi - 2\alpha)}}.$$

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với B∈Ax, khi đó:

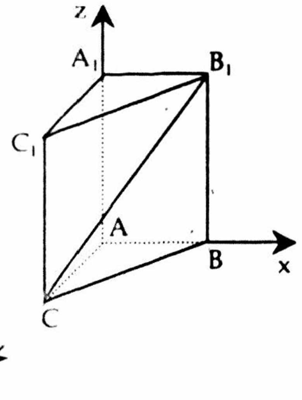
$A(0, 0, 0)$, $B(a\sqrt{2}, 0, 0)$, $C(0, a\sqrt{2}, 0)$.

Giả sử AA_1=h, suy ra $A_1(0, 0, h)$, $B_1(a\sqrt{2}, 0, h)$, $C_1(0, a\sqrt{2}, h)$.

Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vtpt của mặt phẳng (AB_1C) và (BB_1C), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{AC}(0, a\sqrt{2}, 0) \\ \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{AB_1}(a\sqrt{2}, 0, h) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1}(h, 0, -a\sqrt{2}).$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{BC}(-a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, 0) \\ \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{BB_1}(0, 0, h) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2}(1, 1, 0).$$



Ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 2a^2}.\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{4a^2.\cos^2\alpha}{1 - 2\cos^2\alpha} \Leftrightarrow h = \frac{2a.\cos\alpha}{\sqrt{\cos(\pi - 2\alpha)}}.$$

Ví dụ 6: Đường thẳng (d) tạo với 3 đường thẳng vuông góc với nhau từng đôi một (d_1), (d_2) và (d_3) các góc α, β, γ. CMR $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxyz với $Ox//(d_1)$, $Oy//(d_2)$ và $Oz//(d_3)$, khi đó gọi vectơ đơn vị $\vec{a}(x, y, z)$ là vtcp của đường thẳng (d), ta có:

$x = \pm\cos\alpha$, $y = \pm\cos\beta$, $z = \pm\cos\gamma$

$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Ví dụ 7: Đường thẳng (d) tạo với 2 đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau các góc bằng nhau, ngoài ra nó không vuông góc với mặt phẳng α chứa các đường thẳng này. CMR hình chiếu vuông góc (d') của đường thẳng (d) lên mặt phẳng α cũng tạo thành những góc bằng nhau với 2 đường thẳng (d_1) và (d_2).

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxyz với $O = (d_1) \cap (d_2)$ và $(d_1), (d_2) \in Oxy$, khi đó gọi $\vec{a}$, $\vec{a'}$, $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ theo thứ tự là vtcp của các đường thẳng (d), (d'), (d_1), (d_2), ta có:

$\vec{a}(x, y, z)$, $\vec{a'}(x, y, 0)$, $\vec{a_1}(x_1, y_1, 0)$, $\vec{a_2}(x_2, y_2, 0)$.

Từ giả thiết:

$$g(d, d_1) = g(d, d_2) \Leftrightarrow \frac{|\vec{a}.\vec{a_1}|}{|\vec{a}|.|\vec{a_1}|} = \frac{|\vec{a}.\vec{a_2}|}{|\vec{a}|.|\vec{a_2}|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|xx_1 + yy_1|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = \frac{|xx_2 + yy_2|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|xx_1 + yy_1|}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = \frac{|xx_2 + yy_2|}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \Leftrightarrow g(d', d_1) = g(d', d_2).$$

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (ĐHNT TPHCM - 2001): Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a. Gọi M, N là trung điểm BC và DD_1.

a CMR $MN//(A_1BD)$.

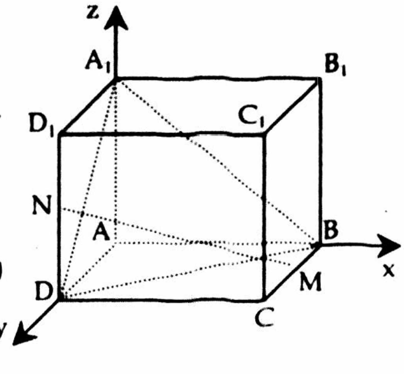
b Tính khoảng cách giữa BD và NM theo a.

BÀI GIẢI

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B \in Ax$, $D \in Ay$ và $A_1 \in Az$, khi đó:

$A(0, 0, 0)$, $B(a, 0, 0)$, $C(a, a, 0)$, $D(0, a, 0)$,

$A_1(0, 0, a)$, $B_1(a, 0, a)$, $C_1(a, a, a)$, $D_1(0, a, a)$,



a Ta có $M(a, \frac{a}{2}, 0)$, $N(0, a, \frac{a}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{MN}(-a, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$.

Sử dụng phương trình mặt chắn, ta được phương trình mặt phẳng (A_1BD) có dạng:

$$(A_1BD): \frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1 \Leftrightarrow (A_1BD): x + y + z - a = 0$$

suy ra vtpt $\vec{n}(1, 1, 1)$.

Nhận xét rằng $\overrightarrow{MN}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \perp \vec{n} \Leftrightarrow MN//(A_1BD)$.

b Vì $MN//(A_1BD) \supset BD$ nên:

$$d(MN, BD) = d(MN, (A_1BD)) = d(M, (A_1BD)) = \frac{|a + \frac{a}{2} - a|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Bài 2 (ĐHGTVT - 2000): Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng 1. Lấy M, N, P theo thứ tự thuộc BB_1, CD và A_1D_1 sao cho $B_1M=CN=D_1P=a$ ($0<a<1$). CMR

a. CMR $\overrightarrow{MN}=-a.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+(a-1)\overrightarrow{AA_1}$.

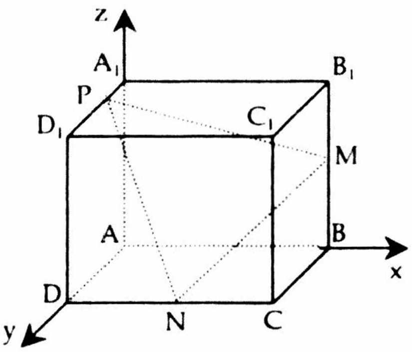
b. $\overrightarrow{AC_1}$ vuông góc với mặt phẳng (MNP).

BÀI GIẢI

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B\in Ax$, $D\in Ay$ và $A_1\in Az$, khi đó:

$A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $D(0, 1, 0)$,

$A_1(0, 0, 1)$, $B_1(1, 0, 1)$, $C_1(1, 1, 1)$, $D_1(0, 1, 1)$,



Vì $B_1M=CN=D_1P=a$ nên

$M(1, 0, 1-a)$, $N(1-a, 1, 0)$, $P(0, 1-a, 1)$.

a. Ta có:

$-a.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+(a-1)\overrightarrow{AA_1}$

$=-a.(1, 0, 0)+(0, 1, 0)+(a-1)(0, 0, 1)$

$=(-a, 1, a-1)=\overrightarrow{MN}$.

b. Ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AC_1}.\overrightarrow{MN}=-a+1+a-1=0\\ \overrightarrow{AC_1}.\overrightarrow{MP}=-1+1-a+a=0\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AC_1} \text{ vuông góc với mặt phẳng (MNP).}$$

Bài 3 (ĐHXD - 98): Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A và C_1 xuống mặt phẳng (CB_1D_1). CMR $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{KC_1}$.

BÀI GIẢI

Giả sử $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có ba kích thước $AB=a$, $AD=b$, $AA_1=c$ với $0<a, b, c$.

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B\in Ax$, $D\in Ay$ và $A_1\in Az$, khi đó:

$A(0, 0, 0)$, $B(a, 0, 0)$, $C(a, b, 0)$, $D(0, b, 0)$,

$A_1(0, 0, c)$, $B_1(a, 0, c)$, $C_1(a, b, c)$, $D_1(0, b, c)$,

Ta có $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{KC_1}$ cùng hướng. (1)

Phương trình mặt phẳng (CB_1D_1) có dạng:

$$(CB_1D_1): \begin{cases}\text{qua } C\\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{CB_1} \ \& \ \overrightarrow{CD_1}\end{cases} \Leftrightarrow (CB_1D_1): \begin{cases}\text{qua } C(a,b,0)\\ \text{vtpt } \vec{n}(bc,ac,ab)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow (CB_1D_1)$: $bcx+acy+abz-2abc=0$.

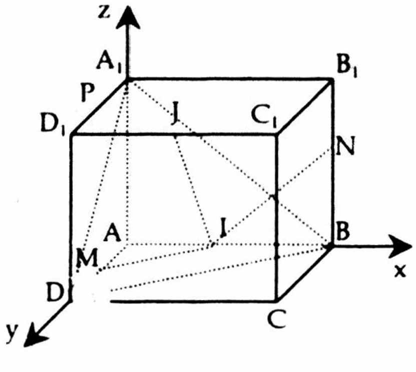
Khi đó độ dài AH và KC_1 được cho bởi:

$$AH=d(A, (CB_1D_1))=\frac{2abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}},$$

$$KC_1=d(C_1, (CB_1D_1))=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}.$$

$\Rightarrow AH=2\,KC_1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{KC_1}$.



Bài 4 (ĐHSP Vinh Khối A - 2000): Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có ba kích thước $AB=a$, $AD=b$, $AA_1=c$ với $0<a<b<c$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm AB, C_1D_1. Các điểm M, N thoả mãn $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BB_1}$ với $0\le k\le 1$.

a Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A_1BD)

b CMR M, N, I, J đồng phẳng và hãy tìm giá trị của k để $MN\perp IJ$.

c Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABDA_1$ và xác định tâm H của đường tròn là giao của mặt cầu (S) với mặt phẳng (A_1BD).

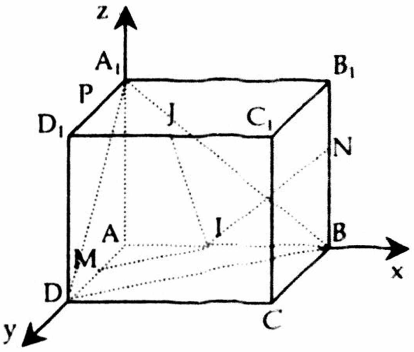
BÀI GIẢI

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B\in Ax$, $D\in Ay$ và $A_1\in Az$, khi đó:

$A(0, 0, 0)$, $B(a, 0, 0)$, $C(a, b, 0)$, $D(0, b, 0)$,

$A_1(0, 0, c)$, $B_1(a, 0, c)$, $C_1(a, b, c)$, $D_1(0, b, c)$,

$I(\frac{a}{2}, 0, 0)$, $J(\frac{a}{2}, b, c)$.



Vì $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BB_1}$ nên

$M(0, kb, 0)$ & $N(a, 0, kc)$

a Sử dụng phương trình mặt chắn, ta được phương trình mặt phẳng (A_1BD) có dạng:

$$(A_1BD): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow (A_1BD): bcx+acy+abz-abc=0$$

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A_1BD) được cho bởi:

$$d=\frac{|-abc|}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}.$$

b Ta có $\overrightarrow{IJ}(0,b,c)$, $\overrightarrow{IM}(-\frac{a}{2},kb,0)$, $\overrightarrow{IN}(\frac{a}{2},0,kc)$

dễ thấy $k\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IN}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ M, N, I, J đồng phẳng.

Gọi K là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABDA_1$ $\Rightarrow$ K là tâm hình hộp, do đó $K(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2})$ và khi đó bán kính R được cho bởi:

$$R^2=KA^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4} \Rightarrow R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

- Phương trình đường thẳng (AK) cho bởi:

$$(AK):\begin{cases}\text{qua } A(0,0,0)\\ \text{vtcp } \vec{b}(a,b,c)\end{cases} \Leftrightarrow (d_O):\begin{cases}x=at\\ y=bt,\ t\in R.\\ z=ct\end{cases}$$

Khi đó toạ độ tâm H của đường tròn là giao của mặt cầu (S) với mặt phẳng (A_1BD) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}bcx+acy+abz-abc=0\\ x=at\\ y=bt\\ z=ct\end{cases}$$

$$\Rightarrow H(\frac{ab^2c^2}{b^2.c^2+a^2.c^2+a^2.b^2},\frac{a^2bc^2}{b^2.c^2+a^2.c^2+a^2.b^2},\frac{a^2b^2c}{b^2.c^2+a^2.c^2+a^2.b^2}).$$

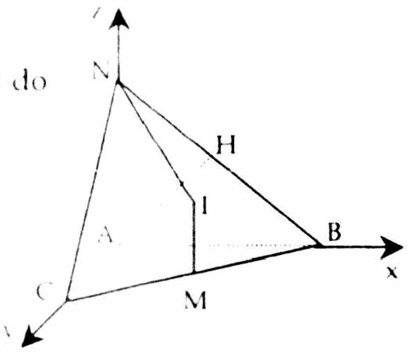
Bài 5 (ĐHGT - 2001): Cho tam giác vuông cân ABC có AB=AC=a, M là trung điểm cạnh BC. Trên các nửa đường thẳng AA_1, MM_1 vuông góc với mặt phẳng (ABC) về cùng một phía, lấy tương ứng các điểm N, I sao cho 2MI=NA=a. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống NB. CMR $AH \perp NI$.

BÀI GIẢI

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B \in Ax$, $C \in Ay$ và $D \in Az$, khi đó:

$A(0, 0, 0)$, $B(a, 0, 0)$, $C(0, a, 0)$

$M(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$, $N(0, 0, a)$, $I(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$.



Vì ΔABN cân tại A nên H là trung điểm BN do đó $H(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2})$.

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}) \\ \overrightarrow{NI}(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{NI} = 0 \Leftrightarrow AH \perp NI.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a.

a. CMR $AC_1 \perp (A_1BD)$.

b. Dựng mặt phẳng α đi qua cạnh AA_1, biết rằng α tạo những góc bằng nhau với hai đường thẳng BC và B_1D.

Bài tập 2. (ĐHSP Vinh Khối D - 2000): Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng 2. Gọi E, F tương ứng là trung điểm của các cạnh AB và DD_1.

a. CMR $EF // (C_1BD)$.

b. Gọi K là trung điểm của C_1D_1. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (KEF) và xác định góc giữa hai đường thẳng EF và BD.

Bài tập 3. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểncủa AB.

a. CMR $SI \perp (ABCD)$ và $AD \perp (SAB)$.

b. Tính góc giữa DB và mặt phẳng (SAD).

c. Tính góc giữa DS và mặt phẳng (SCI).

Bài tập 4. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy. Gọi M, N là hai điểm theo thứ tự thuộc BC, DC sao cho BM=x, DN=y.

a. Tìm hệ thức liên hệ của x, y để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

b. CMR điều kiện cần và đủ để nhị diện (M, SA, N) có số đo bằng 30^0 là

$$a(x+y)+xy\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}.$$

Bài tập 5. (ĐHDL Duy Tân Khối A - 2000): Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có AB=2a, BC=a. Các cạnh bên của hình chốp đều bằng $a\sqrt{5}$.

a. Tính thể tích hình chóp

b Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, CD, SC, SD. CMR ΔSMN là tam giác đều.

c CMR SN vuông góc với mặt phẳng (MNQ).

Bài tập 6. Cho hình chữ nhật ABCD có AB=a, AD=b. Trên hai tia Ax, Cy cùng chiều và cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) lần lượt lấy hai điểm M, N. Đặt AM=x, CN=y. CMR điều kiện cần và đủ để nhị diện (M, BD, N) có số đo bằng 60^0 là $\frac{(a^2+b^2)xy+a^2b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)x^2+a^2b^2}.\sqrt{(a^2+b^2)y^2+a^2b^2}}$.

Bài tập 7. Cho tứ diện vuông OABC (vuông tại O), biết rằng OA, OB, OC lần lượtthợp với mặt phẳng (ABC) các góc α, β, γ. CMR

a $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$.

b $S^2_{\Delta OAB}+S^2_{\Delta OBC}+S^2_{\Delta OCA}=S^2_{\Delta ABC}$.

Bài tập 8. Đường thẳng (d) tạo với 2 đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau các góc bằng nhau khi và chỉ khi nó vuông góc với một trong hai đường phân giác của các góc giữa các đường thẳng này.

Bài tập 9. Cho 2 đường thẳng chéo nhau (d_1) và (d_2). Trên (d_1) lấy hai điểm A_1, B_1; trên (d_2) lấy hai điểm A_2, B_2, đồng thời A_1A_2 là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2), còn đường thẳng B_1B_2 tạo thành những góc bằng nhau với hai đường thẳng (d_1) và (d_2). CMR $A_1B_1=A_2B_2$.

CHỦ ĐỀ 3

GIẢI BÀI TOÁN VỀ ĐIỂM VÀ QUỸ TÍCH TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

> **Bài toán 3**: Sử dụng phương pháp toạ độ trong không gian giải các bài toán quỹ tích trong hình học không gian.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thiết lập hệ trục toạ độ thích hợp, từ đó suy ra toạ độ của các điểm cần thiết.

Bước 2: Thiết lập biểu thức giải tích cho điểm cần tìm quỹ tích, từ đó suy ra quỹ tích của nó.

Ví dụ 1: Cho hình lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$ có đáy ABC vuông cân với $AB=AC=a$ và $AA_1=h$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và A_1C_1. Tìm trên đoạn EF điểm I cách đều hai mặt phẳng (ABC) và (ACC_1A_1). Tính khoảng cách đó.

Giải

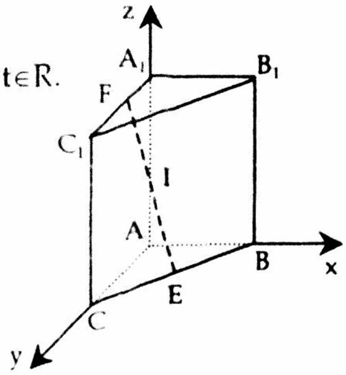
Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B\in Ax$, khi đó:

$$A(0, 0, 0), B(a, 0, 0), C(0, a, 0), A_1(0, 0, h), B_1(a, 0, h), C_1(0, a, h).$$

Vì E, F là trung điểm của BC và A_1C_1 nên $E(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$ và $F(0, \frac{a}{2}, h)$.

Phương trình đường thẳng (EF) được cho bởi:

$$(EF): \begin{cases} \text{Qua } E(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{EF}(-\frac{a}{2}, 0, h) \end{cases} \Leftrightarrow (EF): \begin{cases} x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}t \\ y = \frac{a}{2} \\ z = ht \end{cases}, t\in R.$$



Để im I ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1

Vì $I\in EF$ nên $I(\frac{a}{2} - \frac{a}{2}t, \frac{a}{2}, ht)$, $t\in[0, 1]$.

Vì I cách đều (ABC) và (ACC_1A_1) nên

$$\frac{a}{2} - \frac{a}{2}t = ht \Leftrightarrow t = \frac{a}{a+2h} \Rightarrow I(\frac{ah}{a+2h}, \frac{a}{2}, \frac{ah}{a+2h}).$$

Cách 2

Gọi (P) là mặt phẳng phân giác của nhị diện (ABC, ACC_1A_1), suy ra:

(P): x-z=0 (phân giác của góc phần tám thứ nhất).

Vì $I \in EF$ và cách đều (ABC) và (ACC_1A_1) nên $I=(P)\cap EF$, ta được:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}t \\ y = \frac{a}{2} \\ z = ht \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{a}{a+2h} \Rightarrow I\left(\frac{ah}{a+2h}, \frac{a}{2}, \frac{ah}{a+2h}\right)$$

Khi đó:

- Điểm I chia đoạn EF theo tỉ số k, tức là:

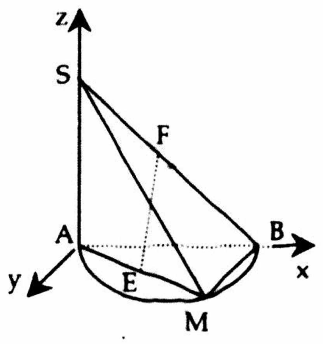
$$x_I = \frac{x_E - kx_F}{1-k} \Leftrightarrow \frac{a}{a+2h} = \frac{\frac{a}{2}}{1-k} \Leftrightarrow k = -\frac{a}{2h}.$$

- Khoảng cách từ I đến hai mặt phẳng (ABC) và (ACC_1A_1) là

$$d = z_I = \frac{ah}{a+2h}.$$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng α cho đường tròn (C) đường kính AB=2R, SA=h (0<h<2R) và vuông góc với mặt phẳng α. Gọi M là điểm di động trên đường tròn (C). Tính h theo R để tồn tại điểm M trên (C) để đoạn nối trung điểm hai đoạn AM và SB là đoạn vuông góc chung của chúng, khi đó tính độ dài của đoạn vuông góc chung này.

Giải



Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B \in Ax$, khi đó:

A(0, 0, 0), B(2R, 0, 0), S(0, 0, h).

Điểm $M \in (C)$ suy ra:

M(a, b, 0) với $a^2+b^2=R^2$. (1)

Gọi E, F là trung điểm AM và SB, ta được:

$$E\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right), F\left(R, 0, \frac{h}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{EF}\left(R-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right).$$

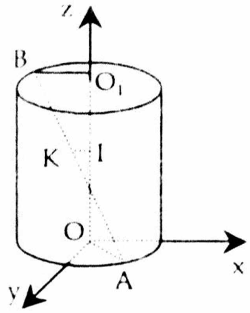
EF là đường vuông góc chung của AM và SB khi:

$$\begin{cases} \overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{SB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{AM} = 0 \\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{SB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(R - \frac{a}{2}\right) - \frac{b^2}{2} = 0 \\ 2R\left(R - \frac{a}{2}\right) - \frac{h^2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = \frac{R}{2} \ \& \ b = \pm\frac{R\sqrt{3}}{2} \\ h = R\sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy với điều kiện $h=R\sqrt{3}$ thì tồn tại hai điểm $M_1\left(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ và $M_2\left(\frac{R}{2}, -\frac{R\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ trên (C) thoả mãn điều kiện đầu bài và khi đó độ dài đoạn vuông góc chung của AM và SB bằng $EF=\frac{R\sqrt{6}}{2}$.

Ví dụ 3 Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O_1, bán kính R, chiều cao hình trụ bằng h. Trên hai đường tròn (O) và (O_1) có hai điểm di động A, B. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm OO_1 và AB.



1. CMR IK là đường vuông góc chung của OO_1 và AB.
2. Tính độ dài IK trong các trường hợp:

   a. $AB=k.h$, với $1<k<\sqrt{1+\frac{4R^2}{h^2}}$.

   b. $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O_1B})=\alpha$.

Từ đó suy ra quỹ tích điểm K khi AB di động.

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxyz với $O_1\in Oz$, khi đó $O_1(0, 0, h)$ và

$A\in(O, R) \Rightarrow A(x_A, y_A, 0)$ với $x_A^2+y_A^2=R^2$.

$B\in(O_1, R) \Rightarrow B(x_B, y_B, h)$ với $x_B^2+y_B^2=R^2$.

I, K là trung điểm OO_1 và AB $\Rightarrow I(0, 0, \frac{h}{2})$, $K(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{h}{2})$.

1. Ta có $\overrightarrow{OO_1}(0, 0, h)$, $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A, h)$ và $\overrightarrow{IK}(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, 0)$ nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{OO_1}.\overrightarrow{IK}=0\\ \overrightarrow{AB_1}.\overrightarrow{IK}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{OO_1}\perp\overrightarrow{IK}\\ \overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{IK}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ IK là đường vuông góc chung của OO_1 và AB.

2. Ta có:

$$IK^2=\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=\frac{1}{4}[x_A^2+x_B^2+y_A^2+y_B^2+2(x_Ax_B+y_Ay_B)]$$

$$=\frac{1}{4}[2R^2+2(x_Ax_B+y_Ay_B)]=\frac{1}{2}(R^2+x_Ax_B+y_Ay_B). \quad (1)$$

a. Với AB=k.h, ta được:

$$k^2.h^2=AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+h^2=x_A^2+x_B^2+y_A^2+y_B^2-2(x_Ax_B+y_Ay_B)+h^2$$

$$\Leftrightarrow x_Ax_B+y_Ay_B=R^2+\frac{(1-k^2)h^2}{2}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$IK^2=\frac{1}{2}[R^2+R^2+\frac{(1-k^2)h^2}{2}]=R^2+\frac{(1-k^2)h^2}{4} \Rightarrow IK=\sqrt{R^2+\frac{(1-k^2)h^2}{4}}.$$

Khi đó quỹ tích điểm K thuộc đường tròn (C) tâm I, bán kính IK ở trong mặt phẳng qua I và vuông góc với OO_1.

b. Với $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O_1B})=\alpha$, ta được:

$$\cos\alpha=\frac{x_Ax_B+y_Ay_B}{\sqrt{x_A^2+y_A^2}.\sqrt{x_B^2+y_B^2}} \Leftrightarrow x_Ax_B+y_Ay_B=R^2\cos\alpha. \quad (3)$$

Thay (3) vào (1), ta được:

$$IK^2=\frac{1}{2}[R^2+R^2\cos\alpha]=R^2.\cos^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow IK=R.\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Khi đó quỹ tích điểm K thuộc đường tròn (C) tâm I, bán kính IK ở trong mặt phẳng qua I và vuông góc với OO_1.

Ví dụ 4: Cho 2 điểm A, B cố định. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$AM:BM=k$, với $0<k\neq 1$

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxyz sao cho A(-a, 0, 0) & B(a, 0, 0), khi đó với điểm M(x, y, z) ta có:

$$\frac{AM}{BM}=k \Leftrightarrow k^2=\frac{AM^2}{BM^2}=\frac{(x+a)^2+y^2+z^2}{(x-a)^2+y^2+z^2}$$

$$\Leftrightarrow [x+\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}]^2+y^2+z^2=\left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2$$

Phương trình trên là phương trình mặt cầu có:

tâm $I(-\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}, 0, 0)$ bán kính $R=\left|\frac{2ak}{1-k^2}\right|$.

II.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hình chóp SABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), ΔABC vuông đỉnh B, AB=a, AC=2a, mặt SBC hợp với (ABC) góc 60^0.

a Tìm trên đoạn BC điểm M cách đều hai mặt phẳng (SAB) và (SAC). Tính khoảng cách đó.

b Tìm trên đoạn SA điểm N cách đều hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Tính khoảng cách đó.

c Tìm trên đoạn AB điểm P cách đều hai mặt phẳng (SAC) và (SBC). Tính khoảng cách đó.

Bài tập 2. Cho góc tam diện vuông Oxyz, trên Ox, Oy, Oz lấy các điểm A, B, C sao cho OA=OB=OC. Giả sử (d) là đường thẳng qua O, các điểm A_1, B_1, C_1 là các điểm đối xứng với A, B, C qua (d). Các mặt phẳng đi qua A_1, B_1, C_1 tương ứng vuông góc với các đường thẳng OA, OB, OC cắt nhau tại M. Tìm tập hợp các điểm M.

Bài tập 3. Cho 3 điểm A, B, C cố định. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$a.AM^2+b.BM^2+c.CM^2=d$,

với a, b, c, $d\in R$ cho trước thoả mãn a+b+c=0.

Bài tập 4. Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm M trong không gian sao cho

$AM^2+BM^2+CM^2+DM^2$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 5. Cho góc tam diện vuông Oxyz. Tìm tập hợp tâm của các đường tròn bán kính R luôn tiếp xúc với các mặt của góc tam diện Oxyz.

Bài tập 6. Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O_1, bán kính bằng $\sqrt{2}$, chiều cao hình trụ bằng $\sqrt{2}$. Trên hai đường tròn (O) và (O_1) có hai điểm di động A, B sao cho $OA\perp O_1B$.

a Dựng đoạn vuông góc chung IK của OO_1 và AB (với $K\in AB$).

b Tìm quỹ tích điểm K khi AB di động.

c CMR các mặt bên của hình chóp $OABO_1$ là các tam giác vuông. Tính thể tích của hình chóp này.

CHỦ ĐỀ 4

GIẢI BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Sử dụng phương pháp toạ độ trong không gian giải các bài toán cực trị trong hình học không gian.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thiết lập hệ trục toạ độ thích hợp, từ đó suy ra toạ độ của các điểm cần thiết.

Bước 2: Thiết lập biểu thức điều kiện (nếu có)

Thiết lập biểu thức giải tích cho đối tượng cần tìm cực trị.

Bước 3: Lựa chọn phương pháp tìm cực trị, thông thường là:

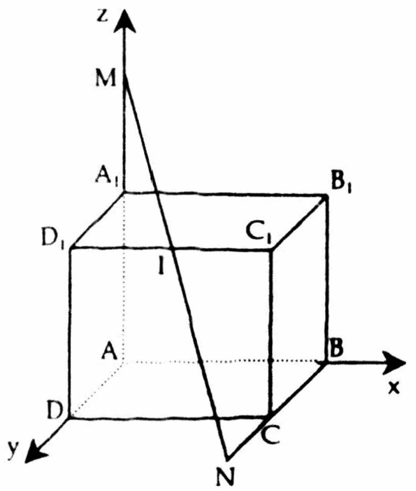
- Phương pháp tam thức bậc hai.
- Sử dụng bất đẳng thức.
- Sử dụng đạo hàm.

Ví dụ 1: Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a. Trên cạnh AA_1 kéo dài về phía A_1 lấy điểm M và trên cạnh BC kéo dài về phía C lấy điểm N sao cho MN cắt cạnh C_1D_1. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN.

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B\in Ax$, $D\in Ay$ và $A_1\in Az$, khi đó:

$A(0, 0, 0)$, $B(a, 0, 0)$, $A_1(0, 0, a)$, $C_1(a, a, a)$



- Phương trình cạnh (AA_1) cho bởi:

$$(AA_1): \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \ u\in(a, +\infty) \\ z = u \end{cases}$$

Với $M\in AA_1 \Rightarrow M(0, 0, u)$

- Phương trình cạnh (BC) cho bởi:

$$(BC): \begin{cases} x = a \\ y = v, \ v\in(a, +\infty) \\ z = 0 \end{cases}$$

Với $N\in BC \Rightarrow N(a, v, 0)$

- Vì $MN\cap C_1D_1=\{I\}$

$\Leftrightarrow MD_1//NC_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MD_1}\ (0, a, a-u)//\ \overrightarrow{NC_1}\ (0, a-v, a)$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{a-v} = \dfrac{a-u}{a} \Leftrightarrow a(u+v)=uv \Leftrightarrow u=\dfrac{av}{v-a}$.

Khi đó:

$MN^2=a^2+u^2+v^2=(u+v)^2-2uv+a^2=(u+v)^2-2a(u+v)+a^2=(u+v-a)^2$

$\Rightarrow MN=u+v-a=\dfrac{av}{v-a}+v-a=\dfrac{v^2-av+a^2}{v-a}$.

Xét hàm số $f(v)=\dfrac{v^2-av+a^2}{v-a}$ với v>a

$f'(x)=\dfrac{v^2-2av}{(v-a)^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow v^2-2av=0 \Leftrightarrow v=2a$

Bảng biến thiên

v	$-\infty$	0		2a		$+\infty$
f'	////		-	0	+	
f	////		↘	3a	↗	

Vậy MinMN=3a, đạt được khi v=2a $\Rightarrow$ u=2a và khi đó dễ thấy MN đi qua trung điểm I của C_1D_1.

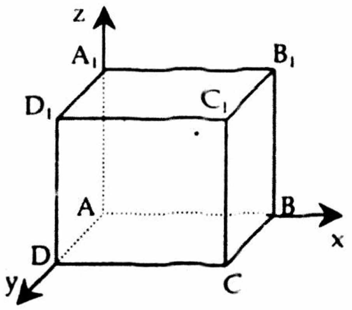
Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh đáy bằng 1 và chiều cao bằng x. Tìm x để góc tạo bởi đường thẳng B_1D và mặt phẳng (B_1D_1C) đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B\in Ax$, $D\in Ay$ và $A_1\in Az$, khi đó:

$C(1, 1, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $B_1(1, 0, x)$, $D_1(0, 1, x)$

$\Rightarrow \overrightarrow{B_1D}(-1, 1, x)$.



Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (B_1D_1C), ta có:

$$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{CB_1}(0,-1,x)\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{CD_1}(-1,0,x)\end{cases} \Rightarrow \vec{n}(-x, -x, -1).$$

Gọi α là góc tạo bởi B_1D và (B_1D_1C), ta có:

$$\sin\alpha=\frac{|\overrightarrow{B_1D}.\vec{n}|}{|\overrightarrow{B_1D}|.|\vec{n}|}=\frac{|x-x-x|}{\sqrt{1+1+x^2}.\sqrt{x^2+x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{2x^4+5x^2+2}}.$$

Ta có α đạt giá trị lớn nhất khi $\dfrac{x}{\sqrt{2x^4+5x^2+2}}$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x^4+5x^2+2}}$ với x>0

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x^4+5x^2+2}-\dfrac{x(4x^3+5x)}{\sqrt{2x^4+5x^2+2}}}{2x^4+5x^2+2}=\frac{2-2x^4}{(2x^4+5x^2+2)^{3/2}}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2-2x^4=0 \Leftrightarrow x=1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
f'	////		+	0	-	
f	////		↗	1/3	↘	

Vậy $Max(\sin\alpha)=\dfrac{1}{3}$, đạt được khi x=1 $\Leftrightarrow$ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ là hình lập phương có cạnh bằng 1.

Chú ý:

1 Cũng có thể sử dụng bất đẳng thức Côsi để tìm cực trị, cụ thể:

Vì x>0 nên:

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2x^2+5+\frac{2}{x^2}}}\overset{Cosi}{\le}\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{2x^2.\frac{2}{x^2}}}}=\frac{1}{3}.$$

2 Phương pháp trên cũng được sử dụng để trả lời câu hỏi: " *Tìm chiều cao của hình lăng trụ để góc tạo bởi đường thẳng B_1D và mặt phẳng (B_1D_1C) có giá trị bằng α cho trước* ".

Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh đáy dài gấp đôi chiều cao. Điểm M trên cạnh AB, tìm giá trị lớn nhất của góc $\widehat{A_1MC_1}$.

Giải

Giả sử lăng trụ có chiều cao bằng a.

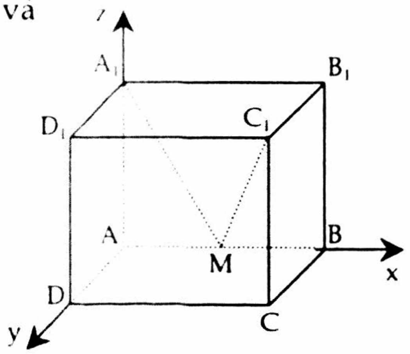
Chọn hệ trục toạ độ Axyz với B∈Ax, D∈Ay và A_1∈Az, khi đó:

$A_1(0, 0, a)$, $C_1(2a, 2a, a)$

Với M∈AB ta có:

M(x, 0, 0) với 0≤x≤2a,

$\overrightarrow{MA_1}$ (-x, 0, a) & $\overrightarrow{MC_1}$ (2a-x, 2a, a).



$$\cos\widehat{A_1MC_1}=\frac{\overrightarrow{MA_1}.\overrightarrow{MC_1}}{|\overrightarrow{MA_1}|.|\overrightarrow{MC_1}|}$$

$$=\frac{-x(2a-x)+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}.\sqrt{(2a-x)^2+4a^2+a^2}}=\frac{(a-x)^2}{\sqrt{x^2+a^2}.\sqrt{(2a-x)^2+5a^2}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \widehat{A_1MC_1}\le\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \text{Max}\,\widehat{A_1MC_1}=\frac{\pi}{2}.$$

đạt được khi x=a ⇔ M(a, 0, 0) là trung điểm của AB

Ví dụ 4: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông đường cao AB=a, BC=2a, SA=a và vuông góc với đáy, ngoài ra còn có SC⊥BD.

a Tính AD.

b Gọi M là điểm trên đoạn SA, đặt AM=x (0≤x≤a). Tính độ dài đường cao DE của ΔBDM theo a và x. Xác định x để DE có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với D∈Ax, B∈Ay và S∈Az, khi đó:

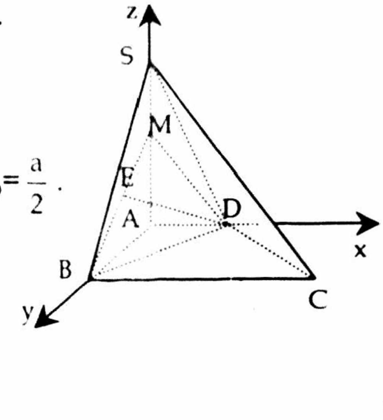
A(0, 0, 0), B(0, a, 0), C(a, 2a, 0), S(0, 0, a).

a Giả sử $D(x_D, 0, 0)$, ta có:

$\overrightarrow{SC}$ (2a, a, -a) & $\overrightarrow{BD}$ $(x_D, -a, 0)$,

SC⊥BD ⇔ $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{BD}=0$ ⇔ $2ax_D-a^2=0$ ⇔ $x_D=\frac{a}{2}$.

Từ đó suy ra AD= $\frac{a}{2}$.



b Vì $M \in SA$ và $AM=x$ nên $M(0, 0, x)$

Độ dài đường cao DE của ΔBDM được cho bởi:

$$DE=\frac{|[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}]|}{|\overrightarrow{BM}|}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{5x^2+a^2}{x^2+a^2}}=\frac{a}{2}\sqrt{5-\frac{4a^2}{x^2+a^2}}.$$

Ta có:

- DE lớn nhất ⇔ $\frac{4a^2}{x^2+a^2}$ nhỏ nhất ⇔ x^2+a^2 lớn nhất ⇔ $x=a$.

Vậy MaxDE=$\frac{a\sqrt{3}}{2}$, đạt được khi $x=a$, tức là khi $M\equiv S$.

- DE nhỏ nhất ⇔ $\frac{4a^2}{x^2+a^2}$ lớn nhất ⇔ x^2+a^2 nhỏ nhất ⇔ $x=0$.

Vậy MinDE=$\frac{a}{2}$, đạt được khi $x=0$, tức là khi $M\equiv A$.

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABCA_1B_1C_1$ có các cạnh bằng a. Lấy E, F theo thứ tự thuộc BC_1, và A_1C. sao cho $EF//(ABB_1A_1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn EF.

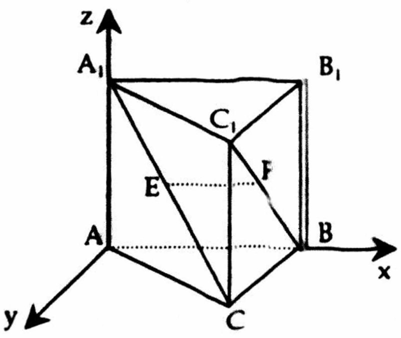
Giải

Chọn hệ trục toạ độ A:xyz với $B \in Ax$, khi đó:

$$A(0, 0, 0), B(a, 0, 0), C(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0), A_1(0, 0, a), B(a, 0, a), C_1(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, a).$$

- Phương trình cạnh (A_1C) cho bởi:

$$(A_1C): \begin{cases} x = u \\ y = u\sqrt{3} \\ z = a - 2u \end{cases}, u \in [0, \frac{a}{2}].$$



Với $E \in A_1C \Rightarrow E(u, u\sqrt{3}, a-2u)$

- Phương trình cạnh (BC_1) cho bởi:

$$(BC_1): \begin{cases} x = a + v \\ y = -v\sqrt{3} \\ z = -2v \end{cases}, v \in [-\frac{a}{2}, 0].$$

Với $F \in BC_1 \Rightarrow F(a+v, -v\sqrt{3}, -2v)$

- Vì $EF//(ABB_1A_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} \perp Ay \Leftrightarrow u+v=0 \Leftrightarrow v=-u$

Khi đó:

$$E(u, u\sqrt{3}, a-2u) \ \&\ F(a-u, u\sqrt{3}, 2u)$$

$$\Rightarrow EF^2=(a-2u)^2+(4u-a)^2=20u^2-12au+2a^2=5(2u-\frac{3a}{5})^2+\frac{a^2}{5} \le \frac{a^2}{5}$$

$$\Leftrightarrow EF \le \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy MinEF=$\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 6: Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Vẽ ba tia Aa, Bb, Cc cùng chiều và cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Trên Aa, Bb lấy các điểm A_1, B_1 sao cho $AA_1=2a$, $BB_1=a$. Xác định vị trí của điểm C_1 trên Cc sao cho $\Delta A_1B_1C_1$ có diện tích nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B\in Ax$, khi đó:

$$A(0, 0, 0),\ B(a, 0, 0),\ C(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0),\ A_1(0, 0, 2a),\ B_1(a, 0, a).$$

Giả sử $CC_1=m$, $m\geq 0$ thì $C_1(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, m)$.

Gọi S, S_1 theo thứ tự là diện tích ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$, gọi α là góc giữa mặt phẳng (ABC) và $(A_1B_1C_1)$, khi đó:

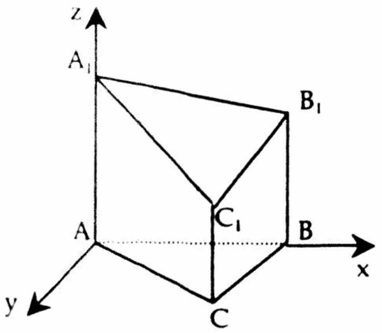
$$S_1=\frac{S}{\cos\alpha}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}. \qquad (1)$$

từ đó ta thấy S_1 đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $\cos\alpha$ đạt giá trị lớn nhất.

Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vtpt của mặt phẳng (ABC) và $(A_1B_1C_1)$, ta có:

$\overrightarrow{n_1}(0, 0, 1)$,

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{A_1B_1}\\ \overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{A_1C_1}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{n_2}(a\sqrt{3}, 3a-2m, a\sqrt{3}).$$



suy ra:

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{6a^2+(3a-2m)^2}}$$

khi đó $\cos\alpha$ đạt giá trị lớn nhất

$$\Leftrightarrow 3a-2m=0 \Leftrightarrow m=\frac{3a}{2} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}.$$

Vậy $\text{Min}S_1=\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$ đạt được khi $CC_1=\frac{3a}{2}$.

Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ $ABCA_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a. $AA_1=2a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi D là trung điểm BB_1, M di động trên cạnh AA_1. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của diệnh tích ΔMC_1D.

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B\in Ax$, khi đó:

$$A(0, 0, 0),\ B(a, 0, 0),\ C(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0),\ A_1(0, 0, 2a),\ B_1(a, 0, 2a),$$

$$C_1(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 2a) \text{ và } D(a, 0, a).$$

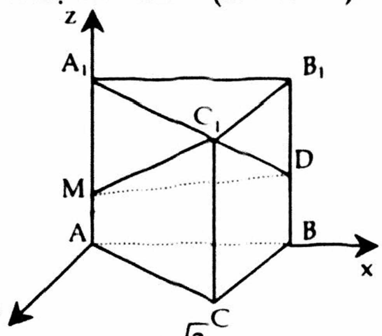
Giả sử AM=m với $0\leq m\leq 2a$ thì M(0, 0, m).

Gọi S, S_1 theo thứ tự là diện tích ΔABC và ΔMC_1D, gọi α là góc giữa mặt phẳng (ABC) và (MC_1D), khi đó:

$$S_1=\frac{S}{\cos\alpha}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}. \qquad (1)$$

từ đó S_1 đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow$ cosα đạt giá trị nhỏ nhất (lớn nhất).

Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vtpt của mặt phẳng (ABC) và (MC_1D), ta có:



$\overrightarrow{n_1}$ (0, 0, 1),

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{MD}\\ \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{DC_1}\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2}\ (\sqrt{3}\,(m-a),\ m-3a,\ a\sqrt{3}\ ).$$

suy ra:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3(m-a)^2+(m-3a)^2+3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{4m^2-12am+15a^2}}.$$

khi đó cosα đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tuỳ thuộc vào hàm số $f(m)=4m^2-12am+15a^2$.

Xét hàm số $f(m)=4m^2-12am+15a^2$ trên [0, 2a].

$$f'(m)=8m-12a \Rightarrow f'(m)=0 \Leftrightarrow 8m-12a=0 \Leftrightarrow m=\frac{3a}{2}$$

Bảng biến thiên

m	$-\infty$	0		$3a/2$		$2a$	$+\infty$
f'			-	0	+		
f		$15a^2$	↘	$6a^2$	↗	$7a^2$	
cosα		$\frac{1}{\sqrt{5}}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	↘	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	

Vậy

$$\text{Max}(\cos\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{Min}S_1=\frac{a^2\sqrt{6}}{4}, \text{ đạt được khi } m=\frac{3a}{2}.$$

$$\text{Min}(\cos\alpha)=\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{Max}S_1=\frac{a^2\sqrt{15}}{4}, \text{ đạt được khi } m=0, \text{ tức là } M\equiv A.$$

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1 (ĐHSP I -Khối B 2001): Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có AB=a, AD=2a, $AA_1=a\sqrt{2}$. Trên cạnh AD lấy điểm M, gọi K là trung điểm B_1M.

1. Đặt AM=m ($0\le m<2a$). Tính thể tích khối tứ diện A_1KID theo và m, trong đó I là tâm hình hộp. Tìm vị trí của điểm M để thể tích đó đạt giá trị lớn nhất.
2. Khi M là trung điểm AD:
   a. Hỏi thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (B_1CK) là hình gì ? Tính diện tích thiết diện đó theo a.
   b. CMR đường thẳng B_1M tiếp xúc với mặt cầu đường kính AA_1.

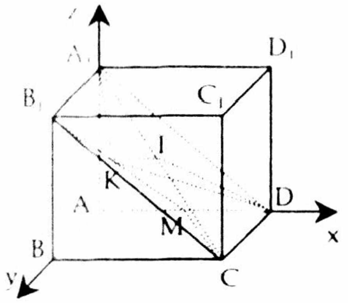
BÀI GIẢI

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $D\in Ax$, $B\in Ay$ và $A_1\in Az$, khi đó:

A(0, 0, 0), B(0, a, 0), C(2a, a, 0), D(2a, 0, 0),

$A_1(0, 0, a\sqrt{2})$, $B_1(0, a, a\sqrt{2})$, $C_1(2a, a, a\sqrt{2})$, $D_1(2a, 0, a\sqrt{2})$,

$I(a, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2})$, M(m , 0, 0), $K(\frac{m}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2})$.



1. Tính thể tích khối tứ diện A_1KID được cho bởi:

$$V=\frac{1}{6}\left|D(\overrightarrow{A_1K},\overrightarrow{A_1I},\overrightarrow{A_1D})\right|=\frac{a^2\sqrt{2}}{24}(2a-m).$$

Khi đó:

$$MaxV=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$, đạt được khi $m=0 \Leftrightarrow M\equiv A$.

2. Khi M là trung điểm AD thì m=a suy ra

$$M(a, 0, 0),\ K(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{2}}{2}).$$

a Vì $(BCC_1B_1)//(ADD_1A_1)$ nên $(B_1CK)\cap(ADD_1A_1)=MN//B_1C//A_1D$ nên N là trung điểm AA_1, do đó $N(0, 0, \frac{a\sqrt{2}}{2})$ và thiết diện B_1CMN là hình thang cân

Ta có:

$$S_{td}=S_{\Delta NB_1M}+S_{\Delta CB_1M}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{NB_1},\overrightarrow{NM}]\right|+\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{CB_1},\overrightarrow{CM}]\right|$$

$$=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}+a^2\sqrt{2}=\frac{3a^2\sqrt{2}}{2}.$$

b Để chứng minh đường thẳng B_1M tiếp xúc với mặt cầu đường kính AA_1 ta đi chứng minh $d(N, B_1M)=\frac{AA_1}{2}$.

Thật vậy:

$$d(N, B_1M)=\frac{S_{\Delta NB_1M}}{B_1N}=\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{AA_1}{2}.$$

Bài 2 (ĐHSP Vinh - Khối D 2001): Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Trên cạnh BD và B_1A lấy điểm M, N sao cho $BM=B_1N=t$. Gọi α, β lần lượt là các góc tạo bởi MN với các đường thẳng BD và B_1A.

a Tính độ dài đoạn MM theo a và t. Tìm t để độ dài MN đạt giá trị nhỏ nhất

b Chứng minh rằng $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1/2$.

c Tính α và β khi MN đạt giá trị nhỏ nhất.

BÀI GIẢI

Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $D\in Ax$, $B\in Ay$ và $A_1\in Az$, khi đó:

$A(0, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(a, a, 0)$, $D(a, 0, 0)$,

$A_1(0, 0, a)$, $B_1(0, a, a)$, $C_1(a, a, a)$, $D_1(a, 0, a)$,

a Phương trình đường thẳng BD được cho bởi:

$$(BD):\begin{cases}\text{qua } D(a,0,0)\\ \text{vtcp } \vec{a}(-1,1,0)//\overrightarrow{BD}\end{cases}\Leftrightarrow (BD):\begin{cases}x=a-u\\ y=u\\ z=0\end{cases},\ u\in[0, a].$$

suy ra $M(a-u, u, 0)$.

Phương trình đường thẳng B_1A được cho bởi:

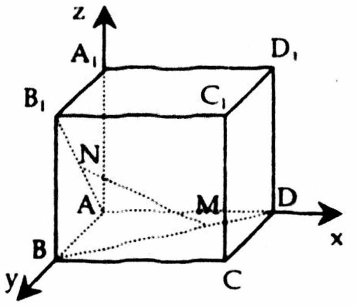
$$(B_1A):\begin{cases}\text{qua } A(0,0,0)\\ \text{vtcp } \vec{b}(0,1,1)//\overrightarrow{AB_1}\end{cases}\Leftrightarrow (B_1A):\begin{cases}x=0\\ y=v\\ z=v\end{cases},\ v\in[0, a].$$

suy ra $N(0, v, v)$.

Theo giả thiết $BM=B_1N=t$ nên $t^2=2(a-u)^2=2(a-v)^2 \Rightarrow u=v$.
Ta có:

$$MN^2=(a-u)^2+(u-v)^2+v^2=2u^2-2au+a^2=2(u-\frac{a}{2})^2+\frac{a^2}{2}\geq\frac{a^2}{2}$$

Vậy $MinMN=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, đạt được khi $u=\frac{a}{2} \Rightarrow t=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



b Ta có $\overrightarrow{MN}$ (u-a, 0, u) do đó:

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{a}.\overrightarrow{MN}|}{|\vec{a}|.|\overrightarrow{MN}|}=\frac{a-u}{\sqrt{2(2u^2-2au+a^2)}}$$

$$\cos\beta=\frac{|\vec{b}.\overrightarrow{MN}|}{|\vec{b}|.|\overrightarrow{MN}|}=\frac{u}{\sqrt{2(2u^2-2au+a^2)}}$$

suy ra:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\frac{(a-u)^2}{2(2u^2-2au+a^2)}+\frac{u^2}{2(2u^2-2au+a^2)}=\frac{1}{2}.$$

c Khi MN đạt giá trị nhỏ nhất thì $u=\frac{a}{2}$ do đó:

$$\cos\alpha=\cos\beta=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha=\beta=60^0.$$

Bài 3 (ĐHHH 95): Cho góc tam diện vuông Oxyz. Điểm N cố định nằm trong góc tam diện, mặt phẳng (P) qua N cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C. Gọi khoảng cách từ N đến các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB) là a, b, c.

a Tính OA, OB, OC để thể tích tứ diện OABC đạt giá trị nhỏ nhất.

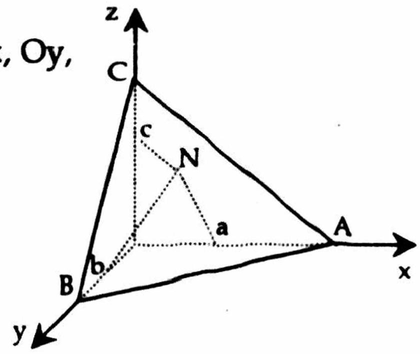
b Tính OA, OB, OC để OA+OB+OC đạt giá trị nhỏ nhất.

BÀI GIẢI

Chọn hệ trục toạ độ Oxyz, từ giả thiết ta được N(a, b, c).
Khi đó phương trình mặt phẳng (P) qua N có dạng:

(P): $\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c)=0$ với $\alpha, \beta, \gamma>0$..

Từ đó bằng cách lấy giao điểm của (P) với Ox, Oy, Oz, ta được:



$$A(\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\alpha}, 0, 0) \Rightarrow OA=\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\alpha},$$

$$B(0, \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\beta}, 0) \Rightarrow OB=\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\beta},$$

$$C(0, 0, \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\gamma}) \Rightarrow OC=\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\gamma}.$$

a Ta có:

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}\frac{(a\alpha+b\beta+c\gamma)^3}{\alpha\beta\gamma}\overset{Côsi}{\geq}\frac{1}{6}\frac{(3\sqrt[3]{a\alpha b\beta c\gamma})^3}{\alpha\beta\gamma}=\frac{9abc}{2}.$$

Vậy $MinV_{OABC}=\frac{9abc}{2}$, đạt được khi $a\alpha=b\beta=c\gamma$, khi đó:

$$OA=\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\alpha}=\frac{a\alpha+a\alpha+a\alpha}{\alpha}=3a,$$

tương tự OB=3b và OC=3c.

b Ta có:

$$OA+OB+OC=\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\alpha}+\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\beta}+\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\gamma}$$

$$=a+b+c+\left(\frac{b\beta}{\alpha}+\frac{a\alpha}{\beta}\right)+\left(\frac{c\gamma}{\alpha}+\frac{a\alpha}{\gamma}\right)+\left(\frac{c\gamma}{\beta}+\frac{b\beta}{\gamma}\right)$$

$$\overset{Côsi}{\geq} a+b+c+2\sqrt{ba}+2\sqrt{ac}++2\sqrt{cb}=(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2.$$

Vậy Min(OA+OB+OC)= $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$, đạt được khi

$$\frac{b\beta}{\alpha}=\frac{a\alpha}{\beta}\ \&\ \frac{c\gamma}{\alpha}=\frac{a\alpha}{\gamma}\ \&\ \frac{c\gamma}{\beta}=\frac{b\beta}{\gamma}\Leftrightarrow a\alpha^2=b\beta^2=c\gamma^2,$$

khi đó:

$$OA=\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\alpha}=a+\frac{b\beta}{\alpha}+\frac{c\gamma}{\alpha}=a+b\sqrt{\frac{a}{b}}+c\sqrt{\frac{a}{c}}=a+\sqrt{ab}+\sqrt{ac},$$

tương tự OB= $\sqrt{ba}+b+\sqrt{bc}$ và OC= $\sqrt{ca}+\sqrt{cb}+c$.

Bài 4 (ĐH Đà Nẵng -Khối A 2001): Cho tứ diện SABC có $SC=CA=AB=a\sqrt{2}$, $SC\perp(ABC)$, ΔABC vuông tại A, các điểm M thuộc SA và N thuộc BC sao cho AM=CN=t (0<t<2a).

a Tính độ dài đoạn MN. Tìm giá trị của t để đoạn MN ngắn nhất.

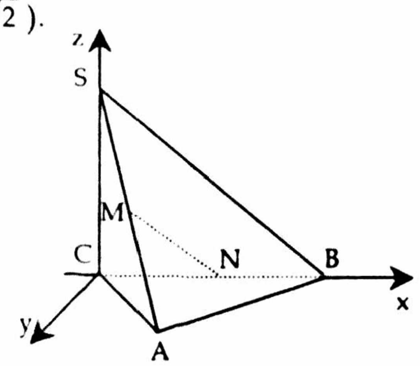
b Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

BÀI GIẢI

Chọn hệ trục toạ độ Cxyz với $B\in Cx$, $S\in Cz$, khi đó:

A(a, a, 0), B(2a, 0, 0), C(0, 0, 0), S(0, 0, $a\sqrt{2}$).

Phương trình (SA) được cho bởi:



$$(SA):\begin{cases}\text{qua } A(a,a,0)\\ \text{vtcp } \vec{a}(-1,-1,\sqrt{2})//\overrightarrow{SA}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (SA):\begin{cases}x=a-u\\ y=a-u,\ u\in[0,a].\\ z=u\sqrt{2}\end{cases}$$

suy ra M(a-u, a-u, $u\sqrt{2}$).

Vì AM=t nên

$$t^2=AM^2=u^2+u^2+2u^2=4u^2\Leftrightarrow u=\frac{t}{2}\Rightarrow M\left(a-\frac{t}{2},\ a-\frac{t}{2},\ \frac{t\sqrt{2}}{2}\right).$$

Vì $N\in BC$ và CN=t nên N(t, 0, 0).

a Ta có:

$$MN^2=\left(a-\frac{3t}{2}\right)^2+\left(a-\frac{t}{2}\right)^2+\frac{t^2}{2}=3t^2-4at+2a^2=3\left(t-\frac{2a}{3}\right)^2+\frac{2a^2}{3}\geq\frac{2a^2}{3}.$$

Vậy MinMN= $\frac{a\sqrt{6}}{3}$, đạt được khi t= $\frac{2a}{3}$.

b Khi đoạn MN ngắn nhất thì

$$M\left(\frac{2a}{3},\frac{2a}{3},\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)\ \&\ N\left(\frac{2a}{3},0,0\right)\Rightarrow \overrightarrow{MN}\left(0,\frac{2a}{3},\frac{a\sqrt{2}}{3}\right).$$

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SA}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC}=0\end{cases}\Rightarrow \text{MN là đường vuông góc chung của BC và SA.}$$

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a.

a Điểm M trên cạnh AB, tìm giá trị lớn nhất của góc A_1MC_1.

b Trên phần kéo dài cạnh AD về phía D lấy điểm N sao cho AN=3, gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh A_1B_1 và DD_1. Lấy các điểm P, Q theo thứ tự thuộc các đoạn AE và CF. Tìm giá trị lớn nhất của tỷ số $\frac{NP}{PQ}$.

c Lấy điểm I chạy trên đoạn AB_1, điểm K chạy trên đường tròn thuộc mặt phẳng (ABCD) có tâm là tâm của hình vuông ABCD và bán kính bằng $\frac{a}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn IK.

d Lấy điểm R, S theo thứ tự chạy trên đoạn AB_1 và BC_1, biết rằng đường thẳng RS tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc bằng 60^0. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn RS.

e Tìm bán kính của hình cầu nhỏ nhất luôn tiếp xúc với các đường thẳng AB_1, B_1C, CD và AD.

Bài tập 2. Cho góc tam diện vuông Oxyz, trên Ox, Oy, Oz lấy các điểm A, B, C sao cho OA=a, OB=b, OC=c với $a \le b \le c$. Một đường thẳng (d) đi qua O. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất có thể nhận được của tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến (d).

Bài tập 3. (ĐHNT Cơ sở II): Cho góc tam diện vuông Oxyz, trên Ox, Oy, Oz lấy các điểm A, B, C

a Hãy tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) theo OA=a, OB=b, OC=c.

b Giả sử A cố định còn B, C thay đổi nhưng luôn thoả mãn OA=OB+OC. Hãy xác định vị trí của B và C sao cho thể tích tứ diện OABC là lớn nhất. CMR khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC lại là nhỏ nhất.

Bài tập 4. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C với AB=2a, $\widehat{BAC}=30^0$, SA=2a và vuông góc với đáy. Gọi M là điểm di động trên cạnh AC, đặt AM=x ($0 \le x \le a\sqrt{3}$).

a Tính khoảng cách từ S đến BM theo a và x.

b Tìm các giá trị của x để khoảng cách trên có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài tập 5. Cho ΔABC vuông tại A có AB=c, AC=b. Gọi (P) là mặt phẳng qua BC và vuông góc với mặt phẳng (ABC), S là một điểm di động trên (P) sao cho hình chóp S.ABC có hai mặt bên SAB và SAC hợp với đáy ABC hai góc có số đo lần lượt là α và $\frac{\pi}{2}\alpha$. Gọi H, I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của S trên BC, AB, AC.

a CMR SH^2=HI.HJ.

b Tìm giá trị lớn nhất của SH và khi đó hãy chỉ ra giá trị của α.

Bài tập 6. Cho hình lăng trụ tam giác $ABCA_1B_1C_1$ có ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB=AC=AA_1=a$. Lấy E, F theo thứ tự thuộc BC_1, và A_1C. sao cho $EF//(ABB_1A_1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn EF.

Bài tập 7. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Vẽ 2 tia Aa, Bb cùng chiều và cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi A_1, B_1 là hai điểm di động trên Aa, Bb sao cho $AA_1+BB_1=l$ (l là độ dài cho sẵn). Xác định vị trí của A_1B_1 sao cho ΔA_1B_1C có diện tích nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài tập 8. Cho hình lăng trụ $ABCA_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a. $AA_1=4a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi D là trung điểm BB_1, M di động trên cạnh AA_1. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của diệnh tích ΔMC_1D.

Bài tập 9. (HVQY - 2001): Cho hai nửa mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến (Δ). Trên (Δ) lấy đoạn AB=a (a là độ dài cho trước). Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với (Δ) và ở trong (P) lấy điểm M với AM=b. Trên nửa đường thẳng Bt vuông góc với (Δ) và ở trong (Q) lấy điểm N với $BN=\frac{a^2}{b}$.

a Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BMN) theo a, b.

b Tính MN theo a, b. Với giá trị nào của b thì MN có độ dài cực tiểu. Tính độ dài cực tiểu đó.

Bài tập 10. Hai hình vuông ABCD và ABEF có cạnh a ở trong hai mặt phẳng vuông góc.

a Chứng tỏ rằng DE vuông góc với AC và BF.

b Giả sử đường thẳng qua D song song với AC cắt AB tại A_1, đường thẳng qua E song song với BF cắt AB tại B_1. Tính độ dài đoạn vuông góc vhung của A_1D và B_1E.

c Hai điểm I, J di động theo thứ tự thuộc các đường thẳng A_1D và B_1E sao cho $A_1I=B_1J=x$. Tính IJ theo a và x và tìm giá trị nhỏ nhất của IJ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. G.KORN-T.KORN. Sổ tay Toán học (Phan Văn Hạp và Nguyễn Trọng Bá dịch). Nhà xuất bản đại học và trung học chuyên nghiệp giáo dục - 1977.
2. MICHAEL SULLIVAN. College Algebra. Dellen Publíhing Company. San Francisco. Caliornia 1990
3. Văn Như Cương, Tạ Mân, Trần Nguyệt Quang. Hình học 12. Nhà xuất bản giáo dục - 1993.
4. Văn Như Cương. Tài liệu chuẩn kiến thức Toán 12. Nhà xuất bản giáo dục - 1994.
5. Trần Thành Minh (Chủ biên). Giải toán Hình học 12. Nhà xuất bản giáo dục - 2001.
6. Tạp chí Toán học tuổi trẻ – Nhà xuất bàn Gáo dục.
7. Trần Phương - Lê Hồng Đức, Chuyên đề Luyện thi Đại học Môn Toán - Hình học Giải tích. Nhà xuất bản Hà Nội - 2002.

LỜI CUỐI

Nhóm Cự Môn luôn sẵn lòng giải đáp mọi thắc mắc của các em học sinh và độc giả về nội dung của cuốn tài liệu này.

Mọi chi tiết xin liên hệ trực tiếp tới:
Nhóm tác giả Cự Môn
Số 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội
Điện thoại: (04) 7196671
E-mail: cumon@hn.vnn.vn hoặc lehongduc39@yahoo.com
Website: www.toanpt.cumon.edu (sẽ khai trương vào ngày 31/10/2004)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng Biên tập: (04) 39714897;
Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: TRƯƠNG THÀNH

PHẠM QUỐC TUẤN

Trình bày bìa: ĐẠI THẮNG

Đối tác liên kết xuất bản:

CTY TNHH SÁCH VÀ VĂN HOÁ PHẨM QUẢNG LỢI

SÁCH LIÊN KẾT

Phương pháp giải toán hình học giải tích trong không gian

Mã số: 1L-85ĐH2010
In 2.000 cuốn, khổ 16x24cm in tại TTCN in Khảo sát và xây dựng
Số xuất bản: 119-2010/CXB/29-10ĐHQGHN, ngày 26/1/2010.
Quyết định xuất bản số: 85LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2010.